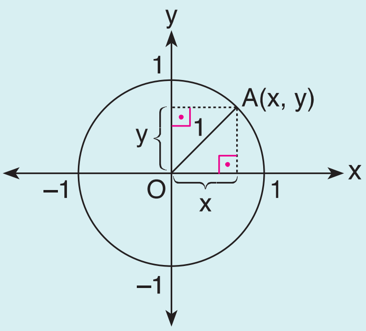
9.4.4.4. Birim Çember ve Trigonometrik Oranların Birim Çember Üzerindeki Noktaların Koordinatları ile İlişkisi

Yarıçapının uzunluğu 1 metre olan bir çember çiziliyor. Başlangıç noktaları çemberin merkezi olacak şekilde iki ışın çizilerek bir geniş açı oluşturuluyor.

» Oluşturulan bu geniş açının trigonometrik oranlarını nasıl hesaplayabilirsiniz?

Bilgi Kutusu

Merkezi orijin ve yarıçapının uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** denir.



A(x, y) noktası birim çember üzerinde ise $x^2 + y^2 = 1$ olur.

Örnek

$A\left(a, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre a nın alacağı değerlerin çarpımını bulalım.

Çözüm

$A\left(a, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ noktası birim çember üzerindeyse

$$a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{3}{16} = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\sqrt{13}}{4} \text{ veya } a = \frac{\sqrt{13}}{4} \text{ olur.}$$

O hâlde $\left(-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right) = -\frac{13}{16}$ bulunur.

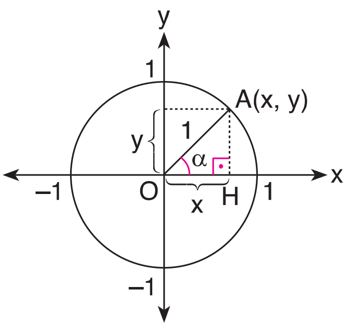
Gıyaseddin Cemşit
(?-1429)

Aritmetik ve geometri üzerine çalışmaları olan iyi bir matematikçi ve gök bilimcidir. Eserlerinde her dereceden kök almayı, ondalık kesirlerle ilgili kuralları ve dört işlemi göstermiştir. Pi sayısının virgülden sonra on yedinci basamağa kadar doğru olarak hesaplanmasını sağlayan yöntemi açıklamıştır. 1 derecelik yayın sinüsünü geometri ve cebir yoluyla hesaplamış, trigonometrik tabloların düzenlenmesi işini kolaylaştırmıştır. Trigonometrideki yeni buluşları, hesaplama yöntemleri ve yaklaşık hesap kuralları ile matematik tarihinde yerini tescil etmiştir.

Örnek

Dik koordinat sisteminin birinci bölgesinde ve birim çember üzerinde alınan bir noktayı orijine birleştiren doğru parçasının eğim açısının trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm

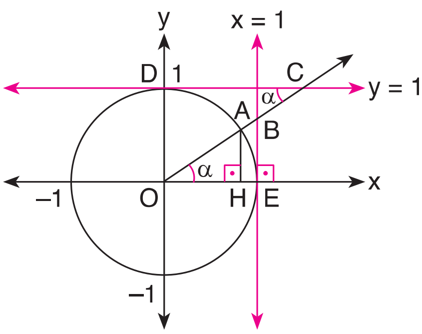


A(x, y) noktasını orijine birleştiren doğru parçasının eğim açısı α olsun.

$\widehat{AOH}$ nde $\sin\alpha = \dfrac{|AH|}{|OA|} = \dfrac{|AH|}{1} = y,$

$\cos\alpha = \dfrac{|OH|}{|OA|} = \dfrac{|OH|}{1} = x$ olur.

Koordinat sisteminde x = 1 ve y = 1 doğrularını çizelim.

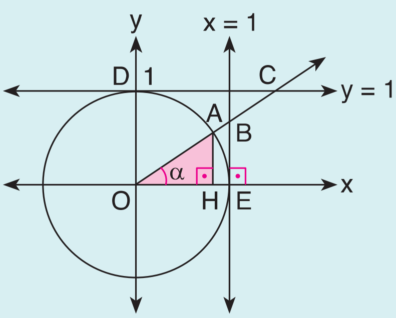


$m(\widehat{OCD}) = m(\widehat{BOE}) = \alpha$ olur.

$\widehat{BOE}$ nde $\tan\alpha = \dfrac{|BE|}{|OE|} = \dfrac{|BE|}{1} = |BE|$ ve

$\widehat{ODC}$ nde $\cot\alpha = \dfrac{|CD|}{|OD|} = \dfrac{|CD|}{1} = |CD|$ bulunur.

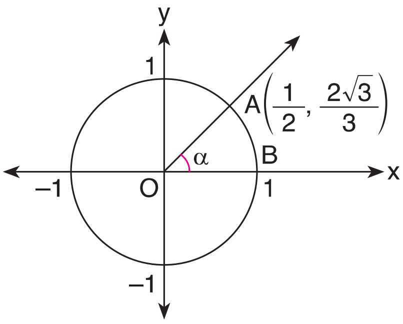
Bilgi Kutusu



α açısının ölçüsünün kosinüs değeri, A noktasının apsisine, sinüs değeri A noktasının ordinatına eşittir.

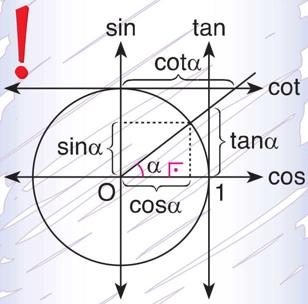
α açısının tanjant değeri, [OA nın x = 1 doğrusunu kestiği B noktasının ordinatına, kotanjant değeri [OA nın y = 1 doğrusunu kestiği C noktasının apsisine eşittir.

Örnek



Şekildeki [OA, birim çemberi $A\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ noktasında kesmektedir.

$\sin(\widehat{AOB}) = \alpha$ ise $\sin\alpha$ ve $\cos\alpha$ değerlerini bulalım.



x ekseni kosinüs ekseni, y ekseni sinüs ekseni, x = 1 doğrusu tanjant ekseni, y = 1 doğrusu kotanjant ekseni olarak adlandırılır.

Çözüm

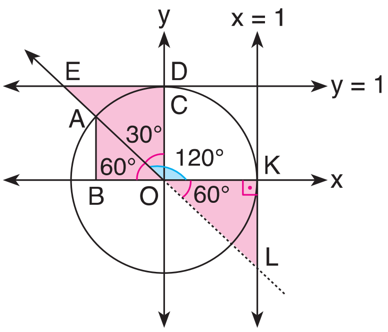
A noktasının apsisi cosα, ordinatı sinα değerine eşittir.

O hâlde $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ olur.

Örnek

120° lik açı ölçüsünün trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{AOB}) = 180° - 120° = 60°$ olup

$\overset{\frown}{ABO}$ nde $|AO| = 1$ birim ise

$|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $|OB| = \frac{1}{2}$ birimdir.

(30°-60°-90° üçgeni)

$m(\widehat{EOD}) = 30°$ olur.

A noktası dik koordinat sisteminin ikinci bölgesinde olduğundan apsisi negatif, ordinatı pozitiftir. Buradan A noktasının koordinatları $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ olur. O hâlde $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ ve $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

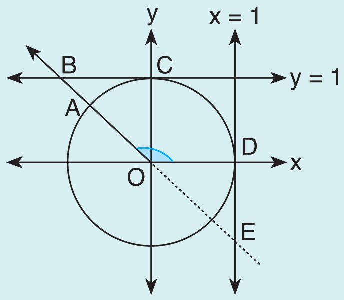
$m(\widehat{EOD}) = 30°$ olup $\overset{\frown}{EOD}$ nde $|OD| = 1$ birim ise $|ED| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ birim olup E noktasının apsisi $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ tür. O hâlde $\cot 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ olur.

$m(\widehat{KOL}) = 60°$ olup $\overset{\frown}{KLO}$ nde $|KO| = 1$ birim ise $|KL| = \sqrt{3}$ birim olup L noktasının apsisi $-\sqrt{3}$ tür. O hâlde $\tan 120° = -\sqrt{3}$ olur.

Ebu'l Vefa (940-998)

Trigonometrinin gelişmesine katkıları bulunan İran asıllı matematikçi ve astronomdur. Ay'a ilişkin çalışmalarında tanjant ve kotanjant fonksiyonlarını ilk kez kullanmıştır. Trigonometrik fonksiyonları çok iyi kullanmış ve tanıtmıştır. Yarım açı formüllerini ispatlamıştır. Trigonometri dışında cebir ile ilgili de çalışmıştır.

Bilgi Kutusu

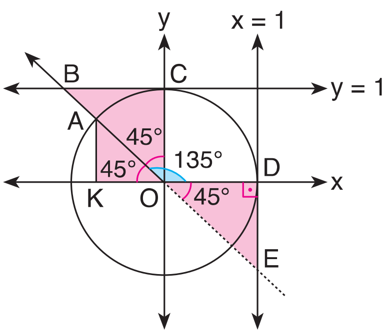


- Geniş açıların birim çemberi kestiği nokta, dik koordinat sisteminin ikinci bölgesinde olduğu için bu noktanın apsisi negatif, ordinatı pozitiftir.
- [OA nın y = 1 doğrusunu kestiği B noktası, dik koordinat sisteminin ikinci bölgesinde olduğu için bu noktanın apsisi negatiftir.
- [OA nın uzantısının x = 1 doğrusunu kestiği E noktası, dik koordinat sisteminin dördüncü bölgesinde olduğu için bu noktanın ordinatı negatiftir.
- α geniş açı ise sinα değeri pozitif; cosα, tanα, cotα değerleri negatiftir.

Örnek

135° lik açı ölçüsünün trigonometrik oranlarını bulalım.

Çözüm



$m(\widehat{AOK}) = 180° - 135° = 45°$,

$m(\widehat{BOC}) = 45°$ olur.

$\widehat{OKA}$ nde $|OA| = 1$ birim ise

$|KO| = |AK| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ birim olup

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dir.

$\widehat{OBC}$ nde $|OC| = 1$ birim $\Rightarrow$ $|BC| = 1$ birim olup B noktasının apsisi -1 dir.

$\widehat{ODE}$ nde $|OD| = 1$ birim $\Rightarrow$ $|DE| = 1$ birim olup E noktasının apsisi -1 dir.

O hâlde $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 135° = -1$ ve $\cot 135° = -1$ olur.

Sıra Sizde

150° lik açı ölçüsünün trigonometrik oranlarını bulunuz.

1. $A\left(\frac{a}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.

2. Aşağıda verilen trigonometrik oranların değerlerinden negatif olanların yanındaki kutucukları işaretleyiniz.

☐ sin110°	☐ sin87°	☐ cos91°
☐ cot173°	☐ tan80°	☐ tan115°
☐ cos127°	☐ sin100°	☐ cot75°

3. 90° lik açı ölçüsünün sinüs ve kosinüs değerlerini bulunuz.

4. $\dfrac{\sin 120° - \cos 150°}{\cot 45° - \cot 135°}$ işleminin sonucunu bulunuz.

5. Dik koordinat sisteminin birinci bölgesinde ve birim çember üzerinde bulunan A noktasının apsisi ordinatının 2 katıdır.

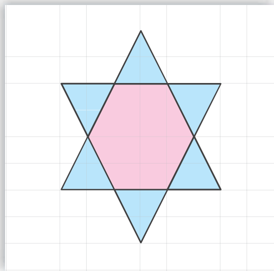
   Buna göre A noktasının koordinatlarını bulunuz.

6. $\dfrac{\sin 135° - \cos 30°}{\tan 60° \cdot \sin 150°}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Sembol ve Gösterimler

$A(\widehat{ABC})$

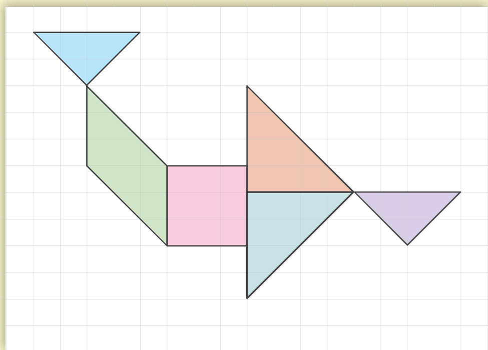
9.4.5. ÜÇGENİN ALANI



Bir otelin giriş kısmının zemininde yandaki gibi yıldız şeklinde bir desen oluşturulmuştur. Bu desende eş büyüklükte eşkenar üçgenler kullanılmıştır. Kullanılan eşkenar üçgenlerin bir kenarının uzunluğu 80 santimetredir.

- Desenin kapladığı alan kaç santimetrekaredir?

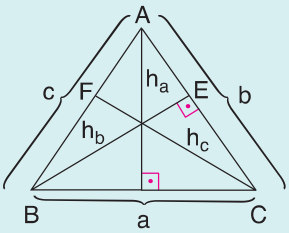
9.4.5.1. Üçgenin Alanı ile İlgili Problemler



» Kareli zeminde tam ve yarım kareler ile oluşturulan şeklin alanı kaç birimkaredir?

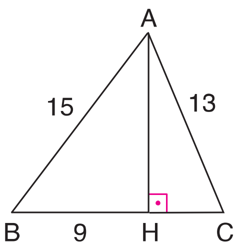
Bilgi Kutusu

Bir üçgenin alanı, bir kenarının uzunluğu ile o kenara ait yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.



$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ dir.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[AH] \perp [BC]$, $|AB| = 15$ cm, $|BH| = 9$ cm ve $|AC| = 13$ cm ise $\widehat{AHC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABH}$ nde Pisagor bağıntısından,

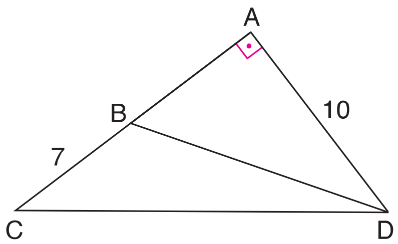
$|AH|^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow |AH|^2 = 225 - 81 \Rightarrow |AH|^2 = 144 \Rightarrow |AH| = 12$ cm olur.

$\widehat{AHC}$ nde Pisagor bağıntısından,

$|HC|^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow |HC|^2 = 169 - 144 \Rightarrow |HC|^2 = 25 \Rightarrow |HC| = 5$ cm olur.

Bu durumda $A(\widehat{AHC}) = \dfrac{|HC| \cdot |AH|}{2} = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30$ cm^2 bulunur.

Örnek



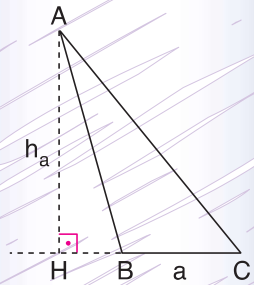
$\widehat{ADC}$ nde $[AD] \perp [AC]$, $|AD| = 10$ cm ve $|BC| = 7$ cm ise $\widehat{BCD}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

BCD geniş açılı üçgen olduğundan BC kenarına ait yükseklik [AD] olur.

Bu durumda $A(\widehat{BCD}) = \dfrac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \dfrac{7 \cdot 10}{2} = 35$ cm^2 bulunur.

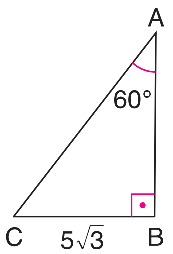
!



ABC geniş açılı üçgeninde

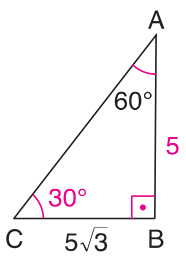
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$ olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{CAB}) = 60°$, $[AB] \perp [BC]$ ve $|BC| = 5\sqrt{3}$ cm ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



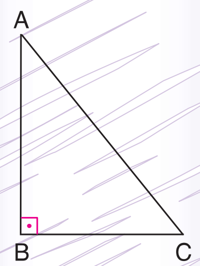
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olur.

30°-60°-90° üçgeninden $|AB| = 5$ cm olur.

Bu durumda

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{5 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ cm^2 bulunur.

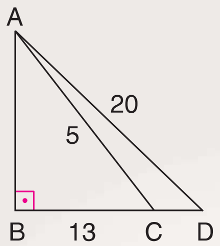
!



ABC dik üçgeninde

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|BC| \cdot |AB|}{2}$ olur.

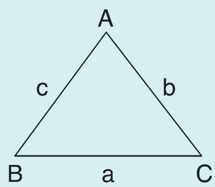
Sıra Sizde



ABC dik üçgen, $[AB] \perp [BC]$, $|AC| = 5$ cm, $|BC| = 13$ cm ve $|AD| = 20$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ACD})$ kaç santimetrekaredir?

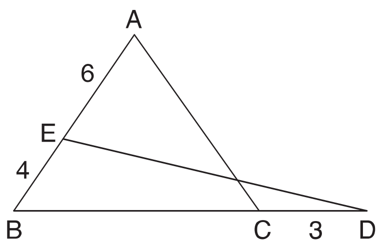
Bilgi Kutusu

İki kenar uzunluğu ve bu kenarların oluşturduğu açının ölçüsünün sinüs değerinin çarpımının yarısı üçgenin alanını verir.



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\widehat{C} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\widehat{A}$$

Örnek



ABC ve EBD bir üçgen, $|AE| = 6$ cm, $|EB| = 4$ cm, $|CD| = 3$ cm ve $A(\widehat{ABC}) = 2 \cdot A(\widehat{EBD})$ olduğuna göre $|BC|$ nun kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABD}$, ABC ve EBD üçgenlerinde ortak açıdır. $A(\widehat{ABC}) = 2 \cdot A(\widehat{EBD})$ ise

$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \sin(\widehat{ABD}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |EB| \cdot |BD| \cdot \sin(\widehat{ABD})$ olur. Buradan

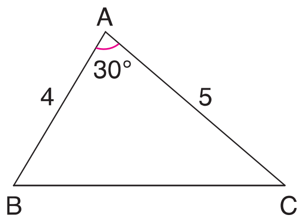
$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |BC| \cdot \sin(\widehat{ABD}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (|BC| + 3) \cdot \sin(\widehat{ABD})$$

$\Rightarrow 10 \cdot |BC| = 8 \cdot |BC| + 24 \Rightarrow 2 \cdot |BC| = 24 \Rightarrow |BC| = 12$ cm olur.

Sıra Sizde

Bir ABC üçgeninde $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm ve $60° \leq m(\widehat{B}) \leq 150°$ olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nın alabileceği en büyük ve en küçük değeri kaç santimetrekaredir?

Örnek

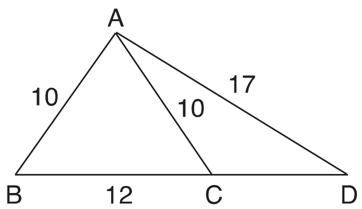


$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 30$, $|AB| = 4$ cm ve $|AC| = 5$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

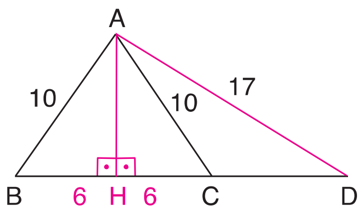
$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}^2$ bulunur.

Örnek



$\widehat{ABD}$ nde $|AB| = |AC| = 10$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AD| = 17$ cm ise $\widehat{ACD}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



ABC ikizkenar üçgen olduğu için $[AH] \perp [BC]$ ve $|BH| = |HC| = 6$ cm olur.

$\widehat{AHC}$ nde Pisagor bağıntısından

$|AH|^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow |AH|^2 = 100 - 36$

$\Rightarrow |AH|^2 = 64$

$\Rightarrow |AH| = 8$ cm olur.

$\widehat{AHD}$ nde Pisagor bağıntısından

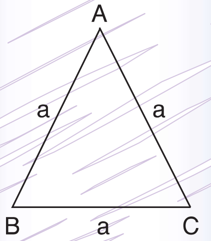
$8^2 + |HD|^2 = 17^2 \Rightarrow |HD|^2 = 289 - 64$

$\Rightarrow |HD|^2 = 225$

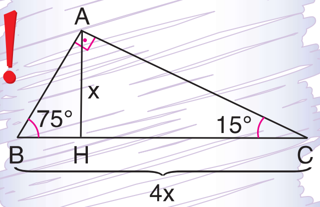
$\Rightarrow |HD| = 15$ cm olur.

$|CD| = |HD| - |HC| = 15 - 6 = 9$ cm olur.

$A(\widehat{ACD}) = \frac{|CD| \cdot |AH|}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \text{ cm}^2$ bulunur.



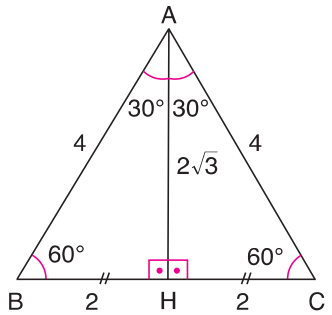
Bir kenarı a birim olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ birimkaredir.



Örnek

Kenar uzunlukları 4 cm olan ABC eşkenar üçgeninin alanını bulalım.

Çözüm



ABC eşkenar üçgeninde yükseklik, kenarortay ve açıortay çakışıktır.

Bu nedenle $[AH] \perp [BC]$ ise

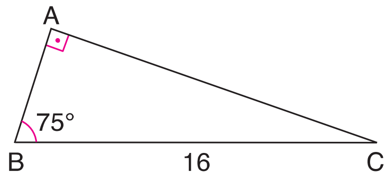
$|BH| = |HC| = 2$ cm ve

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC}) = 30°$ olur.

$\overset{\frown}{AHC}$ nde 30°-60°-90° üçgeni yardımıyla $|AH| = 2\sqrt{3}$ cm bulunur.

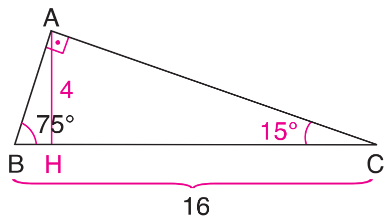
Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $m(\widehat{ABC}) = 75°$ ve $|BC| = 16$ cm ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



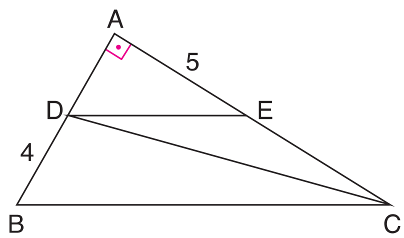
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ACB}) = 15°$ olur.

15°-75°-90° üçgeninde hipotenüse ait yükseklik, hipotenüs uzunluğunun $\frac{1}{4}$ ine eşittir.

O hâlde $|BC| = 16$ cm olduğundan $AH = 16 \cdot \frac{1}{4} = 4$ cm olur.

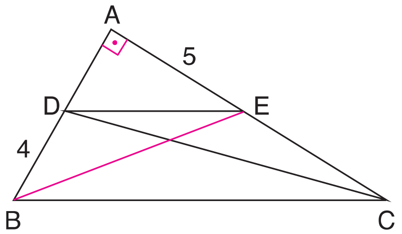
Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{16 \cdot 4}{2} = 32\ \text{cm}^2$ bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $[DE] // [BC]$, $|BD| = 4$ cm ve $|AE| = 5$ cm ise $\widehat{DEC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

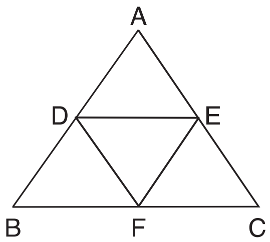


B ile E noktalarını birleştirelim. [DE] // [BC] olduğundan $\widehat{BED}$ ile $\widehat{DEC}$ nin ortak olan $|DE|$ na ait yükseklikleri eştir.

Bu nedenle $A(\widehat{BED}) = A(\widehat{DEC})$ dir.

$$A(\widehat{DEC}) = A(\widehat{BED}) = \frac{|BD| \cdot |AE|}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

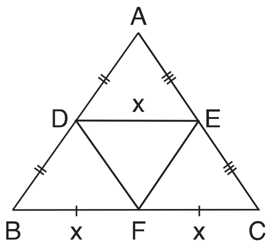
Örnek



D, E ve F noktaları $\widehat{ABC}$ nde bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$A(\widehat{EFC}) = 7$ cm^2 olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



[DE] orta tabandır.

Bu nedenle $|DE| = |BF| = |FC| = x$ olur.

[DE] // [BC] ve D ve E orta noktalar olduğundan $\widehat{ADE}$, $\widehat{DBF}$, $\widehat{DEF}$ ve $\widehat{EFC}$ nin yükseklikleri eşittir. Yükseklikleri ve bu yüksekliklere ait kenar uzunlukları eşit olan üçgenlerin alanları eşittir.

Bu nedenle $A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{DBF}) = A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{EFC}) = 7$ cm^2 olur.

Bu durumda $A(\widehat{ABC}) = 4 \cdot 7 = 28$ cm^2 bulunur.

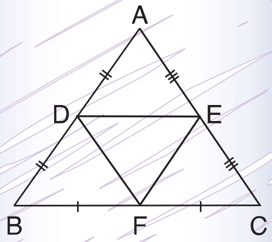
Örnek

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin taban uzunluğu değişim oranı ile alanın değişim oranı arasındaki ilişkiyi dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.

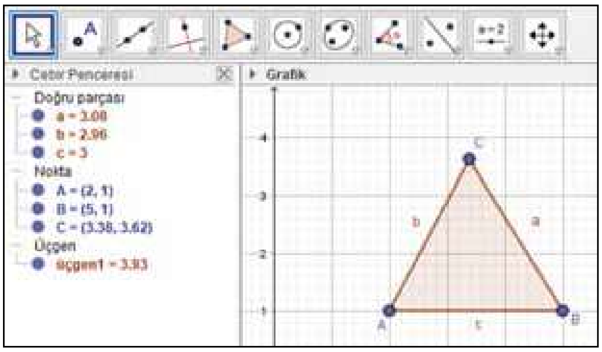
!



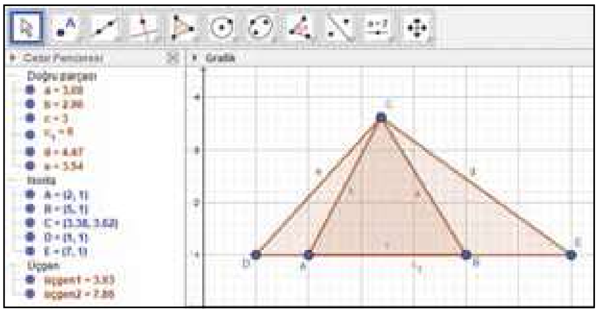
$\widehat{ABC}$ nde D, E ve F orta noktalar olsun.

Bu durumda

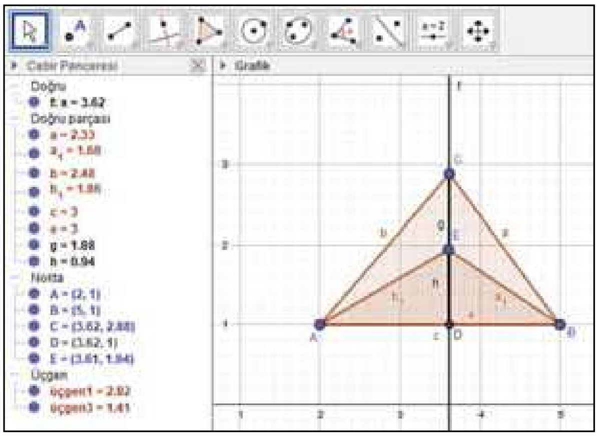
$A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{DBF}) = A(\widehat{DEF}) = A(\widehat{EFC})$ dir.



Daha sonra grafik penceresinde bir köşesi C noktası olan ve DE kenarı AB kenarının üzerinde olan bir CDE üçgeni oluşturalım. Cebir penceresinde c ve c1 kenarlarının uzunluklarının oranının üçgen1 ve üçgen2 çokgenlerinin alanlarının oranına eşit olduğunu görürüz.



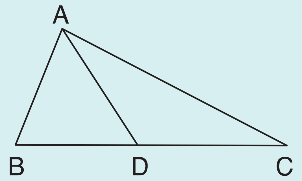
Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım. Grafik penceresinde bir köşesi E noktası olan EAB üçgeni oluşturalım.ww Daha sonra programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Dik Doğru" kısmına tıklayalım. C noktasına ve karşısındaki kenara tıklayıp dik doğruyu oluşturalım. Ardından programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Doğru Parçası" kısmına tıklayalım. Cebir penceresinde g ve h yüksekliklerinin uzunluklarının oranının üçgen1 ve üçgen3 çokgenlerinin alanlarının oranına eşit olduğunu görürüz.



Sonuç olarak yükseklikleri eşit olan üçgenlerin taban uzunluklarının oranı ile alanlarının oranının eşit olduğu ve taban uzunlukları eşit olan üçgenlerin yüksekliklerinin oranı ile alanlarının oranının eşit olduğu görülür.

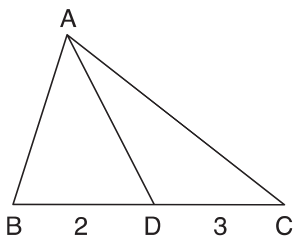
Bilgi Kutusu

Yükseklikleri eş olan üçgenlerin alanları oranı, bu yüksekliklere ait kenar uzunluklarının oranına eşittir.



$$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ADC})} = \frac{|BD|}{|DC|}$$

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $|BD| = 2$ cm, $|DC| = 3$ cm ve $A(\widehat{ADC}) = 45$ cm^2 $\widehat{ABD}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

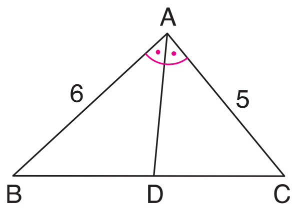
Çözüm

$\widehat{ADC}$ ile $\widehat{ABD}$ nın yükseklikleri aynı olduğundan $\dfrac{A(\widehat{ADC})}{A(\widehat{ABD})} = \dfrac{|DC|}{|BD|}$ olur.

$$\frac{45}{A(\widehat{ABD})} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3 \cdot A(\widehat{ABD}) = 45 \cdot 2$$

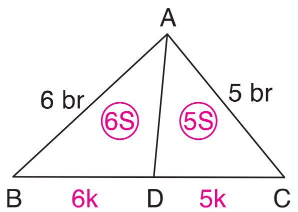
$$\Rightarrow A(\widehat{ABD}) = \frac{90}{3} \Rightarrow A(\widehat{ABD}) = 30 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Örnek



ABC üçgeninde [AD], $\widehat{BAC}$ nın açıortayı, $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm ve $A(\widehat{ABC}) = 143$ cm^2 ise $\widehat{ADC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



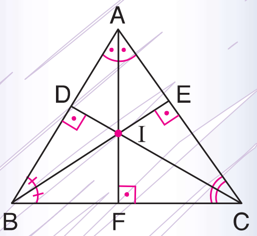
[AD] açıortay olduğundan $|BD| = 6k$, $|DC| = 5k$ olur.

$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{ADC}$ nin yükseklikleri eşit olduğundan $A(\widehat{ABD}) = 6S$ ve $A(\widehat{ADC}) = 5S$ olur.

$A(\widehat{ABC}) = 143 \Rightarrow 6S + 5S = 143 \Rightarrow 11S = 143 \Rightarrow S = 13$ cm^2 olur.

$A(\widehat{ADC}) = 5 \cdot S = 5 \cdot 13 = 65$ cm^2 bulunur.

!

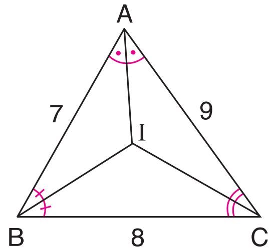


$\widehat{ABC}$ nin iç açıortaylarının kesim noktası I olsun. Açıortay üzerinden açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları eşit olduğundan

$|DI| = |IE| = |IF|$ dır.

$\widehat{AIB}$, $\widehat{AIC}$ ve $\widehat{IBC}$ nin yükseklikleri eş olduğundan, bu üçgenin alanları taban uzunlukları ile orantılıdır.

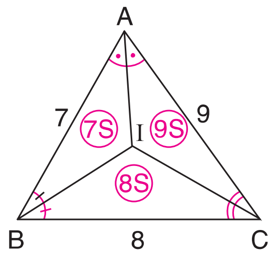
Örnek



$\widehat{ABC}$ nin iç açıortaylarının kesim noktası I dır.

$|AB| = 7$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 9$ cm ve $A(\widehat{ABC}) = 48\ cm^2$ olduğuna göre $\widehat{IAC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



I iç açıortayların kesim noktası olduğundan $\widehat{AIB}$, $\widehat{AIC}$ ve $\widehat{IBC}$ nin alanları taban uzunlukları ile doğru orantılıdır.

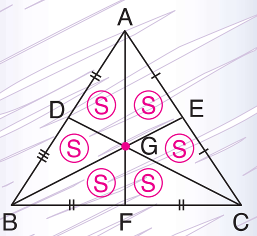
Bu nedenle $A(\widehat{AIB}) = 7S$, $A(\widehat{AIC}) = 9S$ ve $A(\widehat{IBC}) = 8S$ olur. $A(\widehat{ABC}) = 48\ cm^2$ olduğundan

$7S + 8S + 9S = 48 \Rightarrow 24S = 48$

$\Rightarrow S = 2\ cm^2$ olur.

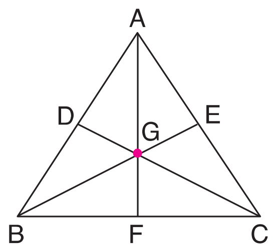
Buradan $A(\widehat{IAC}) = 9 \cdot S = 9 \cdot 2 = 18\ cm^2$ bulunur.

!



Bir üçgenin üç kenarortayı üçgenin alanını altı eş parçaya böler.

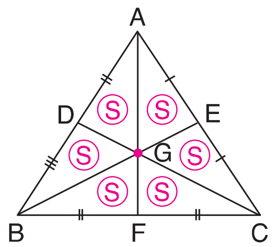
Örnek



Şekildeki $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G noktasıdır.

$A(\widehat{ABC}) = 66\ cm^2$ ise $\widehat{AGE}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



$A(\widehat{AGE}) = S$ olsun. G ağırlık merkezi olduğundan $|AE| = |EC|$ dir.

$A(\widehat{AGE}) = S$ ise $A(\widehat{EGC}) = S$ olur.

$|AG| = 2k$, $|GF| = k$ olur.

$\dfrac{A(\widehat{CAG})}{A(\widehat{CGF})} = \dfrac{2}{1}$ olur.

Buradan $A(\widehat{CAG}) = 2S$ ise $A(\widehat{CGF}) = S$ bulunur.

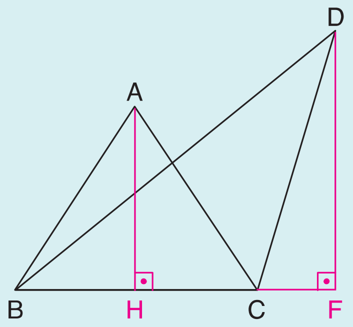
Benzer şekilde $A(\widehat{ADG}) = A(\widehat{BDG}) = A(\widehat{GBF}) = S$ olur.

$A(\widehat{ABC}) = 66 \Rightarrow 6S = 66 \Rightarrow S = 11\ cm^2$ bulunur.

Bu durumda $A(\widehat{AGE}) = S = 11\ cm^2$ olur.

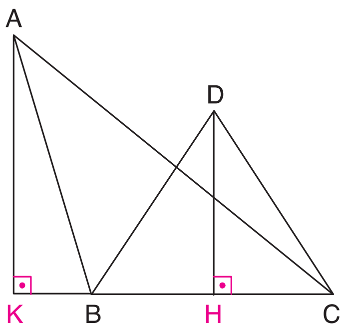
Bilgi Kutusu

Aynı tabana sahip üçgenlerin alanları oranı, eşit olan taban uzunluklarına ait yüksekliklerin oranına eşittir.



$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{\frac{|BC|\cdot|AH|}{2}}{\frac{|BC|\cdot|DF|}{2}} = \frac{|AH|}{|DF|} \text{ olur.}$$

Örnek



Şekilde $[DH] \perp [BC]$, $[AK] \perp [KC]$, $|DH| = 4$ cm, $|AK| = 5$ cm ve $A(\widehat{DBC}) = 16$ cm^2 ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DBC}$ nin ortak tabanları [BC] olur.

O hâlde $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{|AK|}{|DH|} \Rightarrow \dfrac{A(\widehat{ABC})}{16} = \dfrac{5}{4}$

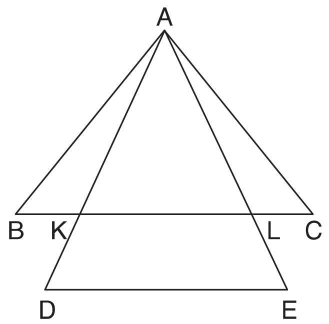
$\Rightarrow 4 \cdot A(\widehat{ABC}) = 5 \cdot 16$

$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 20$ cm^2 bulunur.

Bilgi Kutusu

Benzer üçgenlerin alanları oranı, benzerlik oranının karesine eşittir. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve bu üçgenlerin benzerlik oranı k olsun. $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2$ olur.

Örnek

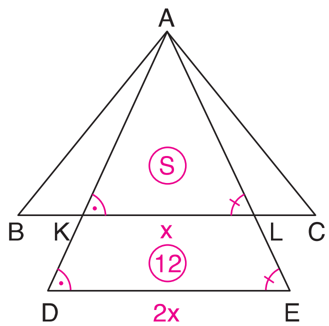


Şekilde [BC] // [DE],

$6|KL| = 2|BC| = 3|DE|$ ve

$A(KLED) = 12\ cm^2$ ise $\widehat{ABC}$ nin alanının kaç santimetrekare olduğunu bulalım.

Çözüm



[BC] // [DE] olduğundan $\widehat{AKL} \sim \widehat{ADE}$ dir.

$\dfrac{|KL|}{|DE|} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan benzerlik oranı $\dfrac{1}{2}$ dir.

Bu üçgenlerin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşit olduğundan

$$\frac{A(\widehat{AKL})}{A(\widehat{ADE})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S+12} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4S = S + 12$$

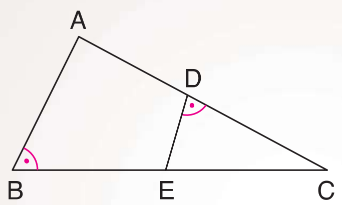
$$\Rightarrow 3S = 12 \Rightarrow S = 4\ cm^2 \text{ olur.}$$

O hâlde $A(\widehat{AKL}) = 4\ cm^2$ olur.

$\widehat{AKL}$ ile $\widehat{ABC}$ nin yükseklikleri eşittir. $|KL| = x$ ve $|BC| = 3x$ olduğundan

$$\frac{A(\widehat{AKL})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{A(\widehat{ABC})} = \frac{1}{3} \Rightarrow A(\widehat{ABC}) = 12\ cm^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

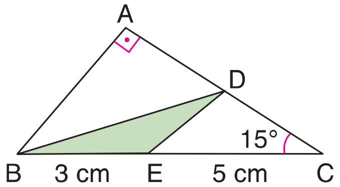


Şekilde $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{CBA})$,

$\dfrac{|EC|}{|AC|} = \dfrac{3}{4}$ ve

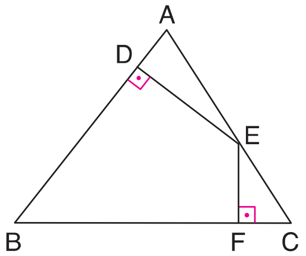
$A(\widehat{DEC}) = 2\ cm^2$ olduğuna göre $\widehat{ABC}$ nin alanı kaç santimetrekaredir?

1.



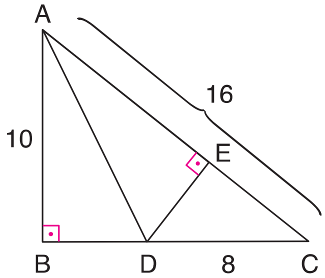
$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [AC]$, $|AD| = |DC|$, $m(\widehat{ACB}) = 15°$, $|BE| = 3$ cm ve $|EC| = 5$ cm olduğuna göre $A(\widehat{BED})$ kaç santimetrekaredir?

2.



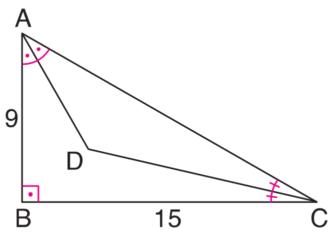
$\widehat{ABC}$ nde $|EF| = 4$ cm, $|DE| = 6$ cm, $|BC| = 10$ cm ve $|AB| = 8$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ kaç santimetrekaredir?

3.



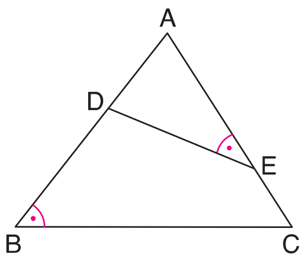
$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$, $[DE] \perp [AC]$, $|DC| = 8$ cm, $|AB| = 10$ cm ve $|AC| = 16$ cm olduğuna göre $|DE|$ kaç santimetredir?

4.



$\widehat{ABC}$ nde $[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$, $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DCA})$, $|AB| = 9$ cm ve $|BC| = 15$ cm olduğuna göre $A(\widehat{ADC})$ kaç santimetrekaredir?

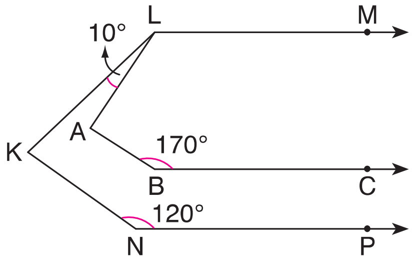
5.



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ABC})$, $\dfrac{|DA|}{|CA|} = \dfrac{2}{3}$ ve $A(\widehat{ADE}) = 24\ cm^2$

olduğuna göre A(BDEC) kaç santimetrekaredir?

1.



Şekilde [LM // [BC // [NP,

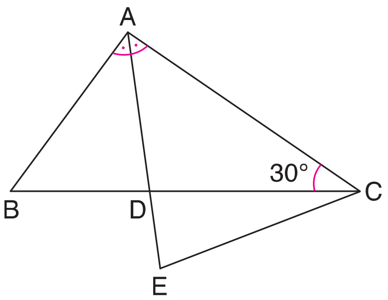
$m(\widehat{KLA}) = 10°$, $m(\widehat{ABC}) = 170$,

$m(\widehat{KNP}) = 120°$ ve $m(\widehat{LKN}) = 2 \cdot m(\widehat{LAB})$

olduğuna göre $m(\widehat{ALM})$ kaç derecedir?

A) 110 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

2.



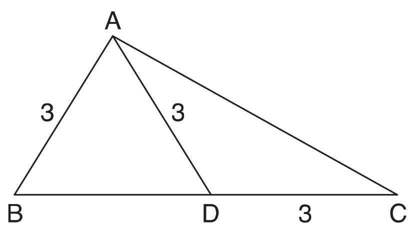
Şekilde $|AB| = |AD|$, $|CD| = |CE|$,

$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC})$, $m(\widehat{ACB}) = 30°$

olduğuna göre $m(\widehat{DCE})$ kaç derecedir?

A) 40 B) 35 C) 30 D) 25 E) 20

3.



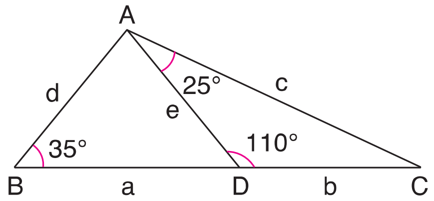
ABC üçgeninde D ∈ [BC],

$|AB| = |AD| = |DC| = 3$ cm

olduğuna göre $|AC|$ nun santimetre cinsinden kaç farklı tam sayı değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4.



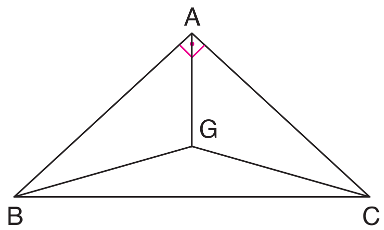
ABC üçgeninde D ∈ [BC], $m(\widehat{ABC}) = 35°$,

$m(\widehat{ADC}) = 110°$, $m(\widehat{DAC}) = 25°$

olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) a > d B) e > b C) a + b > c D) d > c E) b > c

5.

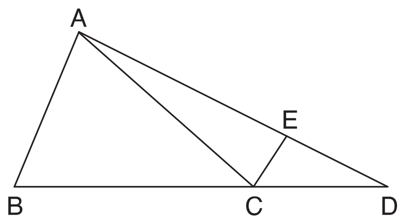


$\widehat{ABC}$ nde [BA] ⊥ [AC], $|AB| = 30$ cm,

$|AG| = 26$ cm ve G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

A) $72\sqrt{2}$ B) 72 C) 68 D) $36\sqrt{2}$ E) 36

6.

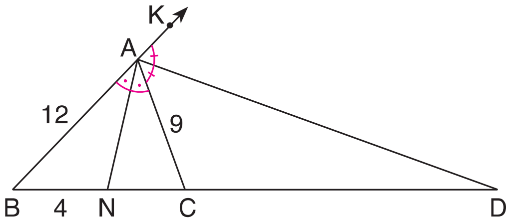


$\widehat{ABC}$ nde $2|AD| = 5|ED|$, $|BD| = 3|CD|$ dır.

$A(ECD) = 16 \text{ cm}^2$ olduğuna göre $A(ABD)$ kaç santimetrekaredir?

A) 140 B) 120 C) 114 D) 96 E) 80

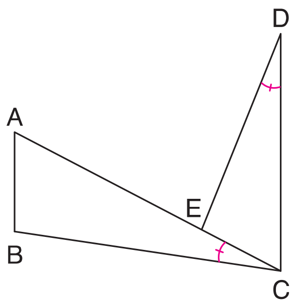
7.



$\widehat{ABC}$ üçgeninde m($\widehat{BAC}$) = m($\widehat{NAC}$),
m($\widehat{CAD}$) = m($\widehat{DAK}$), |AB| = 12 cm,
|BN| = 4 cm ve |AC| = 9 cm
olduğuna göre |CD| kaç santimetredir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

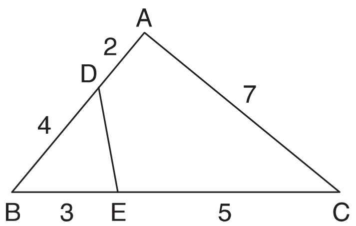
8.



Şekilde m($\widehat{EDC}$) = m($\widehat{ACB}$), |BC| = |ED|,
|AC| = |DC|, |EC| = (3x + 4) cm,
|AB| = (x + 10) cm olduğuna göre göre x kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

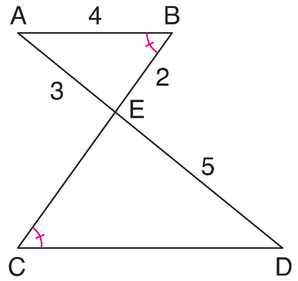
9.



$\widehat{ABC}$ nde D ∈ [AB], E ∈ [BC],
|AD| = 2 cm, |DB| = 4 cm, |BE| = 3 cm,
|EC| = 5 cm ve |AC| = 7 cm
olduğuna göre |DE| kaç santimetredir?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) 5 E) $\frac{9}{2}$

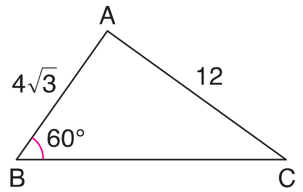
10.



Şekilde
[CB] ∩ [AD] = {E},
[AB] // [CD] dir.
|AB| = 4 cm,
|AE| = 3 cm,
|BE| = 2 cm,
|ED| = 5 cm
olduğuna göre |EC| + |CD| kaç santimetredir?

A) 8 B) 10 C) 16 D) 20 E) 22

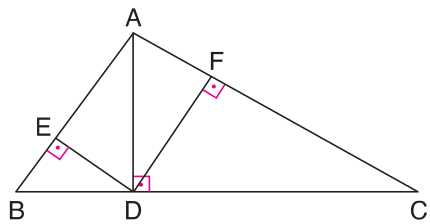
11.



$\widehat{ABC}$ nde
|AB| = $4\sqrt{3}$ cm,
|AC| = 12 cm
ve m($\widehat{ABC}$) = 60° olduğuna göre A($\widehat{ABC}$) kaç santimetrekaredir?

A) $24\sqrt{3}$ B) 24 C) $12\sqrt{3}$ D) 12 E) $8\sqrt{3}$

12.



ABC üçgeninde
[AD] ⊥ [BC], [DF] ⊥ [AC], [DE] ⊥ [AB],
|AF| = 4 cm, |FC| = 16 cm ve |BD| = $2\sqrt{5}$ cm
olduğuna göre |ED| kaç santimetredir?

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) 4 E) $4\sqrt{3}$

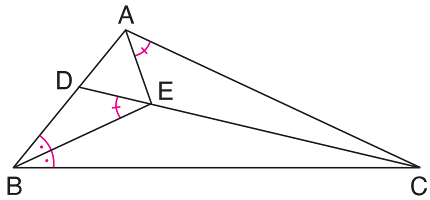
13. $\dfrac{\sin 60° - \cos 150°}{\cos 120° + \sin 90°}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{3} - 1$

D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

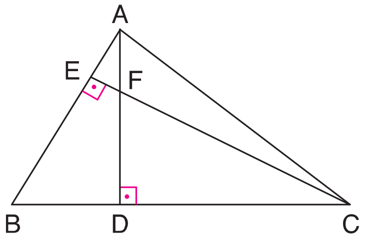
1.



ABC üçgeninde $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC})$,
$m(\widehat{DEB}) = m(CAE)$, $m(\widehat{DAE}) = 40°$,
$m(\widehat{ACE}) = 20°$ ve $m(\widehat{DCB}) = 30°$
olduğuna göre $m(\widehat{CAE})$ kaç derecedir?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

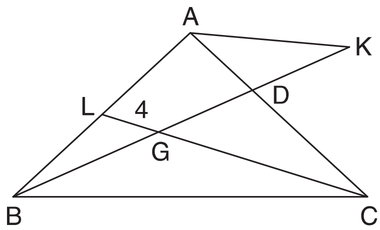
2.



$\widehat{ABC}$ nde $[CE] \perp [AB]$ ve $[AD] \perp [BC]$,
$|EF| = 2$ cm, $|BD| = 4$ cm, $|AD| = 6$ cm
olduğuna göre A(EBDF) kaç santimetrekaredir?

A) 12 B) 9 C) 8 D) 6 E) 3

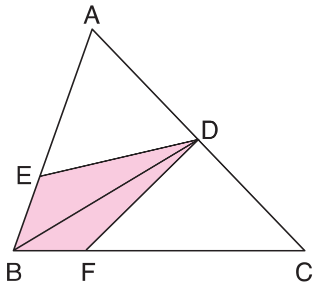
3.



$\widehat{ABC}$ nde $|AL| = |LB|$, $|GD| = |DK|$,
$|AD| = |DC|$ ve $|LG| = 4$ cm
olduğuna göre $|AK|$ kaç santimetredir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

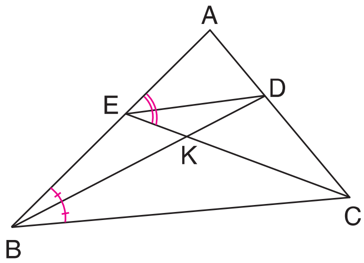
4.



$\widehat{ABC}$ nde $|BC| = 4 \cdot |BF|$, $|AB| = 4 \cdot |EB|$,
$|AD| = |DC|$ ve $A(\widehat{ABC}) = 64 \text{ cm}^2$
olduğuna göre boyalı alan kaç santimetrekaredir?

A) 10 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

5.



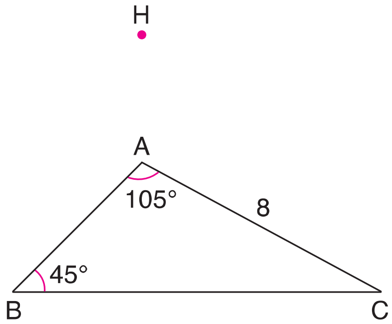
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$,
$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{DEC})$, $|BC| = 16$ cm,
$|AE| = 4$ cm ve $|EB| = 8$ cm
olduğuna göre $|KC|$ kaç santimetredir?

A) $\dfrac{10}{3}$ B) $\dfrac{32}{9}$ C) $\dfrac{14}{3}$ D) $\dfrac{16}{3}$ E) $\dfrac{28}{3}$

6. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ olmak üzere $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\tan\beta$ değerlerinin işaretleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) −, +, + B) +, −, − C) +, +, −
D) +, −, + E) +, +, +

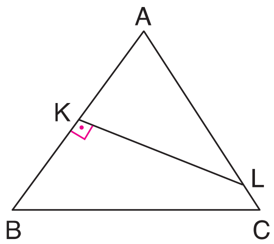
7.



H noktası $\widehat{ABC}$ nin diklik merkezidir.
m($\widehat{ABC}$) = 45°, m($\widehat{BAC}$) = 105° ve |AC| = 8 cm olduğuna göre H noktasının [BC] na olan uzaklığı kaç santimetredir?

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

8.

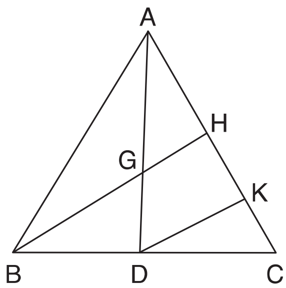


$\widehat{ABC}$ üçgeninde
[LK] ⊥ [AB] dır.
|AK| = |KB|,
|AC| = 9 cm,
|BC| = 7 cm ve

|LC| bir tam sayı olduğuna göre en az kaç santimetredir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

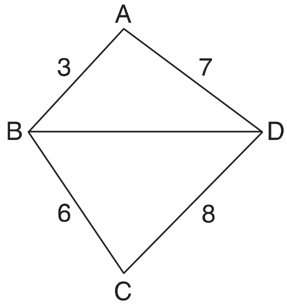
9.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.
[BH] // [DK] ve
|BH| = 9 cm
olduğuna göre |DK| kaç santimetredir?

A) $\frac{4}{3}$ B) 3 C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 9

10.



ABCD dörtgeninde
|AB| = 3 cm,
|BC| = 6 cm,
|CD| = 8 cm,
|DA| = 7 cm ve

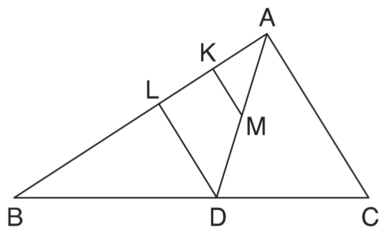
|BD| tam sayı olduğuna göre en çok kaç santimetredir?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 14

11. Bir $\widehat{ABC}$ nde [AB] ⊥ [BC], sin($\widehat{BAC}$) = $\frac{3}{5}$ ve |AB| = 12 cm olduğuna göre |AC| kaç santimetredir?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 20 E) 25

12.



$\widehat{ABC}$ nde D ∈ [BC], [AC] // [KM] // [LD],
4|AK| = 4|KL| = |AB| ve |AC| = 12 cm
olduğuna göre |KM| kaç santimetredir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

13. Bir $\widehat{ABC}$ nde |AB| = 12 cm, |BC| = 6 cm ve A($\widehat{ABC}$) = $18\sqrt{3}$ cm^2 olduğuna göre m($\widehat{ABC}$) kaç derece olabilir?

A) 30 B) 45 C) 120 D) 135 E) 150

VERİ, SAYMA VE OLASILIK

VERİ

Bu Ünitede Neler Öğreneceğiz?

- Veri kavramı, kesikli ve sürekli veri
- Aritmetik ortalama
- Ortanca
- Tepe değer
- En büyük ve en küçük değer
- Açıklık
- Standart sapma
- Merkezi eğilim ve yayılım ölçülerini kullanarak gerçek hayat durumlarını yorumlama
- Histogram
- Grafik türleri ve yorumlama