9.4.2.4. Üçgenlerin Benzerliği ile İlgili Problemler

Thales'in bir piramidin yüksekliğini nasıl ölçtüğüne dair farklı söylentiler vardır. Aristoteles'in (Aristotilis) öğrencisi olan Hieronymus (Hayranimus) "Thales" kendi gölgesinin boyuna eşit olduğu anda, piramidin gölgesini ölçerek yüksekliğini bulmuştur." demiştir. Thales bir geminin kıyıdan uzaklığını ölçerken de iki dik üçgenin kenarları arasındaki orantıdan yararlanmıştır.

Matematik dersinde bu bilgileri öğrenen Altay, Galata Kulesi'nin yüksekliğini ölçmek istiyor. Bunun için kuleden 11,5 metre uzağa yere düz bir ayna bırakıp doğrusal olarak 0,3 metre daha ilerlediğinde kulenin uç noktasını aynada görüyor. Boyu 1,80 m olan Altay aynaya gelen ışığın aynadan aynı açı ile yansıdığını biliyor.

» Üçgenlerin benzerliği ile ilgili kuralları kullanarak hesap yapan Altay, Galata Kulesi'nin yüksekliğini yaklaşık kaç metre bulmuştur?

! Gerçek yaşamda uzunluklarını farklı nedenlerden dolayı ölçemediğimiz nesnelerin uzunluklarını ölçmede üçgenlerin benzerliğinden yararlanırız.

Örnek

Güneşli bir günde belli bir anda bir ağacın yüksekliğini ölçmek için ağacın yanında 1 metre boyunda bir çubuk yere dik olarak tutuluyor.

Bu çubuğun gölgesi 0,68 m olarak ölçüldüğü anda ağacın gölgesinin boyu 3,4 m olduğuna göre ağacın yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulalım.

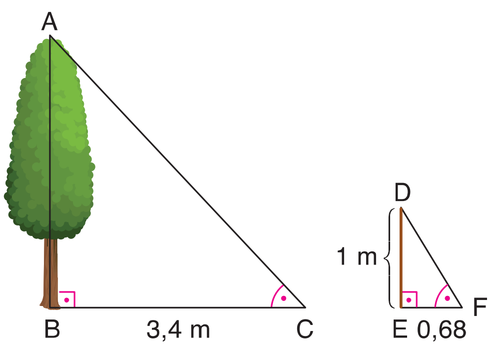
Çözüm

Problemde verilenleri yandaki gibi modelleyebiliriz.

$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$ ve

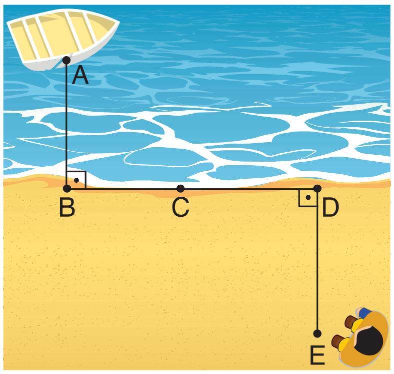
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = 90°$

olduğundan $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$ dir.



Buradan $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} \Rightarrow \dfrac{|AB|}{1} = \dfrac{3,4}{0,68} \Rightarrow |AB| = 5$ m bulunur.

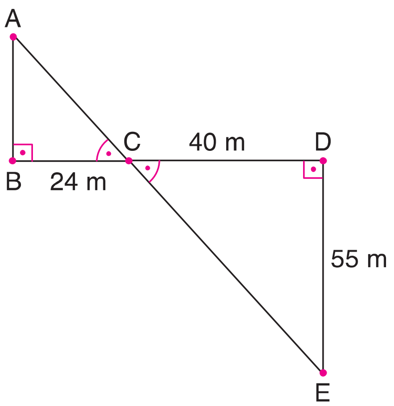
Örnek



Faruk denizde A noktasında sabit duran bir kayığın kıyıdan uzaklığını yaklaşık olarak hesaplamak istiyor. Bunun için şekildeki gibi B noktasından kıyı boyunca doğrusal olarak 24 m ilerliyor ve C noktasına bir çubuk dikip 40 m daha yürüyerek D noktasına geliyor. Sonra kıyıya dik şekilde ilerlemeye devam ediyor. E noktasına geldiğinde kayık ve çubuğu aynı hizada görüyor.

Faruk kıyıya dik şekilde 55 m yürüdüğüne göre kayığın kıyıdan uzaklığını bulalım.

Çözüm



Verilenleri yandaki gibi modellersek $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ olduğunu görürüz. Buradan

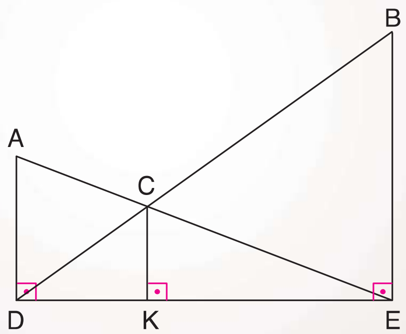
$$\frac{|AB|}{55} = \frac{24}{40} \Rightarrow 5|AB| = 3 \cdot 55$$

$$\Rightarrow |AB| = 3 \cdot 11$$

$$\Rightarrow |AB| = 33 \text{ m olur.}$$

Kayık, kıyıdan 33 m uzaklıktadır.

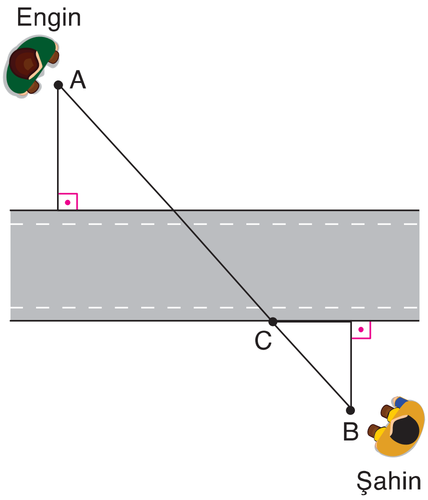
Sıra Sizde



A noktasından E ye, B noktasından D ye doğrusal olarak hareket eden iki kişi C noktasında karşılaşıyor.

$|AD| = 60$ m ve $|BE| = 120$ m olduğuna göre $|CK|$ kaç metredir?

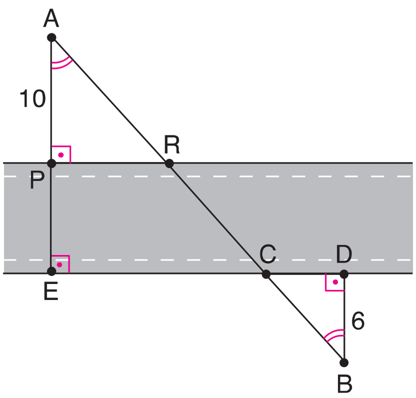
Örnek



Yol kenarından 10 m uzaklıktaki A noktasında bulunan Engin ile yolun diğer kenarının 6 m uzağındaki B noktasında bulunan Şahin birbirlerine doğru şekildeki gibi doğrusal bir biçimde hareket ederek C noktasında karşılaşıyorlar.

$3 \cdot |BC| = |AC|$ olduğuna göre yolun genişliğinin kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm



$3 \cdot |BC| = |AC| \Rightarrow |BC| = k$ iken $|AC| = 3k$ olur.

$m(\widehat{PAR}) = m(\widehat{CBD})$ ve

$m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{BDC}) = 90°$

olduğundan A.A. kuralı gereğince $\widehat{AEC} \sim \widehat{BDC}$ dir.

Buradan $\dfrac{|AE|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \dfrac{10 + |PE|}{6} = \dfrac{3k}{k}$

$\Rightarrow 10 + |PE| = 18$

$\Rightarrow |PE| = 8$ m bulunur.

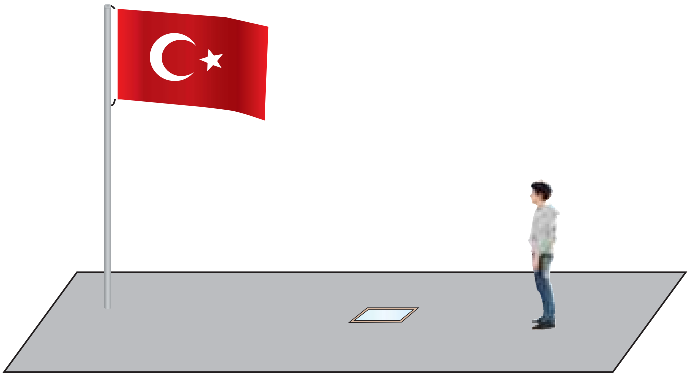
Yolun genişliği 8 m olur.

Sıra Sizde

25 cm uzunluğunda olan ve ışık geçirmeyen bir boru, bir duvar ile yerde bulunan bir ışık kaynağının arasına dik bir şekilde yerleştiriliyor.

Borunun duvar ile arasındaki mesafe 3 m; ışık kaynağı ile arasındaki mesafe ise 1,5 m olduğuna göre oluşan gölgenin boyu kaç santimetredir?

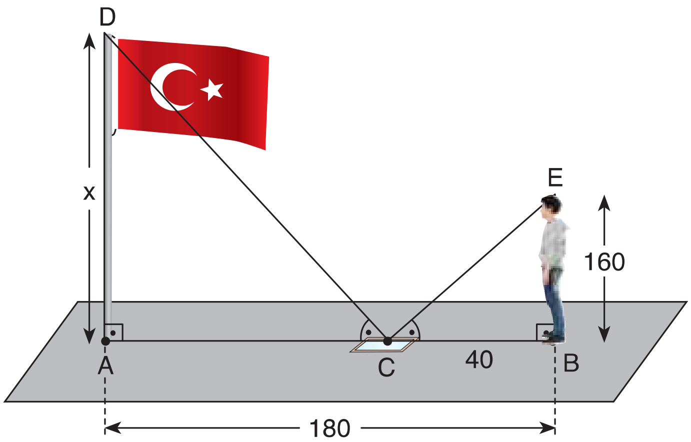
Örnek

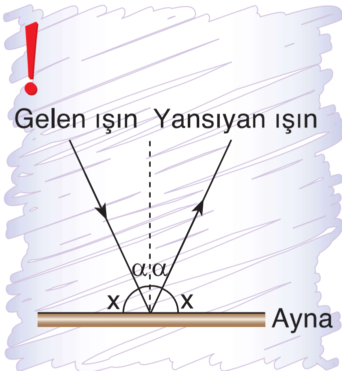


160 cm boyundaki Kemal okul bahçesindeki bayrak direğinin boyunu ölçmek istiyor. Bunun için bayrak direği, kendisi ve ayna doğrusal olacak şekilde bayrak direği ile kendisi arasına yere bir ayna koyuyor. Bu ayna kendisinden 40 cm uzaklıkta iken aynada direğin tepe noktasını görebiliyor.

Kemal ile bayrak direği arasında 180 cm uzaklık olduğuna göre direğin boyunun yaklaşık olarak kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm





$|AB| = 180$ cm ise $|AC| = |AB| - |BC| = 180 - 40 = 140$ cm olur.

Bayrak direği ve Kemal zemine dik olduklarından

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{EBC}) = 90°$ dir.

Yansıma kuralına göre aynaya gelen ışık aynadan aynı açıyla yansıdığından $m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ECB})$ olur. O hâlde $\widehat{ADC} \sim \widehat{BEC}$ dir.

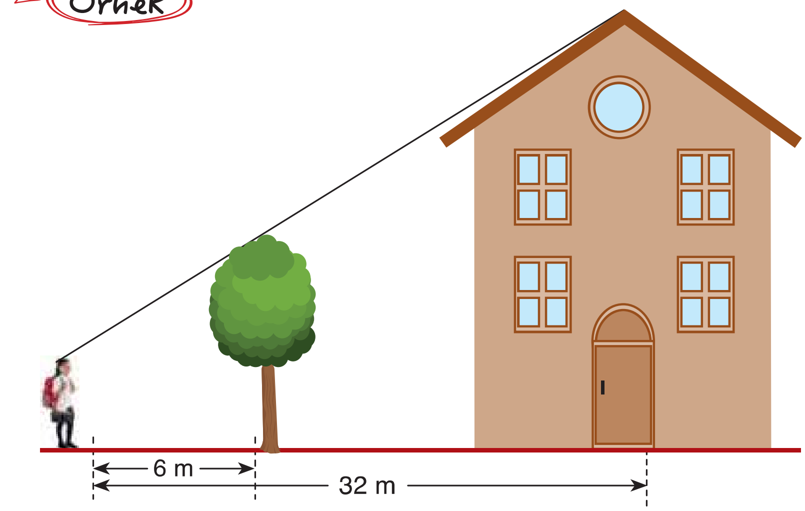
Buradan $\dfrac{|AD|}{|BE|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} \Rightarrow \dfrac{x}{160} = \dfrac{140}{40}$

$\Rightarrow x = 140 \cdot 4$

$\Rightarrow$ 560 cm bulunur.

Direğin boyu yaklaşık 560 cm olur.

Örnek

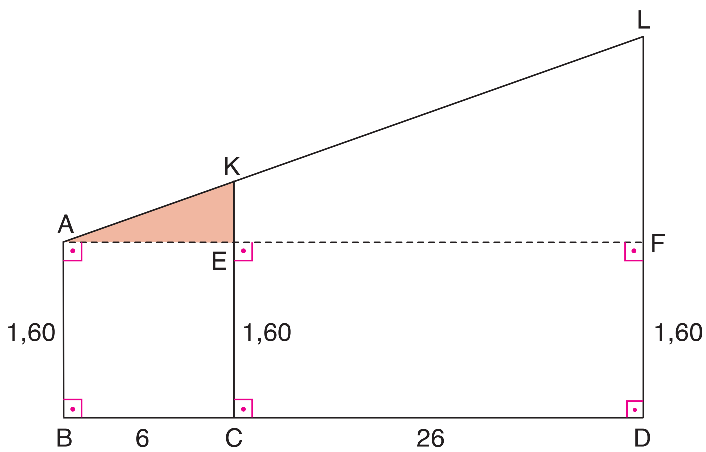


Yaşadığı evin yerden yüksekliğini hesaplamak isteyen 1,60 boyundaki Zehra, evinden 32 m uzaklaşıp evine doğru bakıyor. Kendisinden 6 m uzaklıkta bulunan 4 m boyundaki ağacın en üst noktasıyla evinin en üst kısmını aynı hizada görüyor.

Zehra, ağaç ve ev doğrusal bir konumda olduklarına göre evin yüksekliğinin yaklaşık kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm

Verilenleri aşağıdaki gibi modelleyelim.

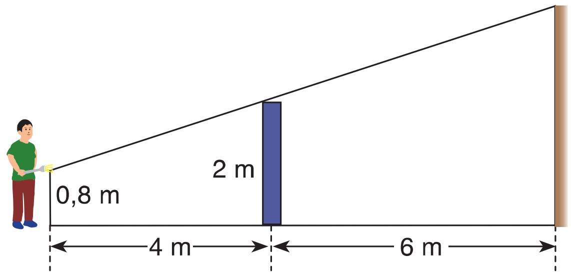


$|KE| = |KC| - |EC| = 4 - 1{,}6 = 2{,}4$ m olur.

$\widehat{AKE} \sim \widehat{ALF}$ olup $\dfrac{|KE|}{|LF|} = \dfrac{|AE|}{|AF|} \Rightarrow \dfrac{2{,}4}{|LF|} = \dfrac{6}{32} \Rightarrow |LF| = 12{,}8$ m olur.

O hâlde evin yüksekliği yaklaşık olarak
$|LD| = |LF| + |FD| = 12{,}8 + 1{,}6 = 14{,}4$ m olur.

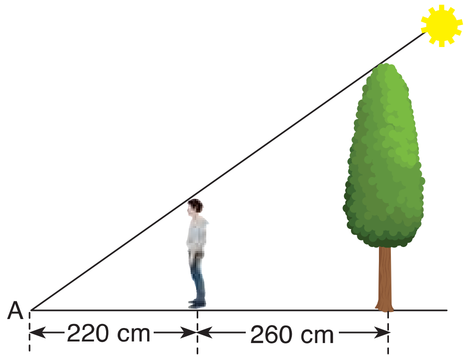
1.



Burak ışık geçirmeyen 2 m yüksekliğindeki bir engelden 4 m uzaklıkta durmaktadır. Bu engele doğru yerden 0,8 m yükseklikten fener tuttuğunda engelin arkasındaki ve engele uzaklığı 6 m olan duvarı görmemektedir.

Burak, engeli duvara doğru kaç metre yaklaştırırsa duvarın 1 metrelik kısmını görür?

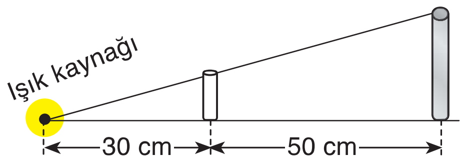
2.



Cemal, şekildeki gibi ağacın gölgesinin uç noktası ile kendi gölgesinin uç noktası A noktasında çakışacak şekilde ağaçtan 260 cm uzaklıkta duruyor.

Cemal'in boyu 176 cm ve gölgesinin boyu 220 cm olduğuna göre ağacın boyu kaç santimetredir?

3.

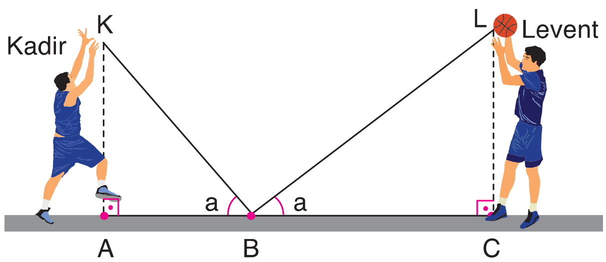


12 cm uzunluğundaki bir muma 30 cm uzaklıktan şekildeki gibi bir ışık kaynağı tutulduğunda mumdan 50 cm uzaklıkta gölgesi oluşuyor.

Mumun boyu 3 cm kısalırsa gölgesinin boyu kaç santimetre kısalır?

4. Güneşli bir günde belli bir anda 2,4 m uzunluğundaki bir ağacın gölgesinin boyu 1,6 m olmaktadır. Aynı anda gölgesinin uzunluğu 4,8 m olan bir ağacın boyu kaç metredir?

5.



Kadir elindeki topu yerden 1,8 m yükseklikten ve kendinden 2,7 m uzaklığa atıyor. B noktasına değdikten sonra zıplayan topu Levent yerden 2 m yükseklikte tutuyor.

$m(\widehat{KBA}) = m(\widehat{LBC})$ olduğuna göre Levent'in topun yere değdiği noktaya olan uzaklığı kaç metredir?

Sembol ve Gösterimler

n_A

n'_A

V_a

G

h_a

9.4.3. ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

Sivas Ulu Cami Anadolu'nun en eski camilerindendir. Bu cami minaresinin eğikliği ile dikkat çekmektedir. Caminin minaresi kendi eksenine göre 25° eğik durumdadır. Her yıl eğilmeye devam eden minarenin yıkılmaması için yenileme çalışmaları yapılmaktadır.

- Minarenin eğilmesine karşın henüz yıkılmamasının nedeni ne olabilir?
- Binalarda ağırlık merkezinin en uygun noktada oluşturulması binanın her türlü yük altında daha dayanıklı olmasını sağlar mı?

9.4.3.1. Üçgenin İç ve Dış Açıortayları

» Kağıt katlama yöntemi ile bir üçgenin bir iç açısının açıortayını nasıl bulursunuz?

! Üçgenin açıortayı, kenarortayı ve yüksekliği üçgenin yardımcı elemanlarıdır.

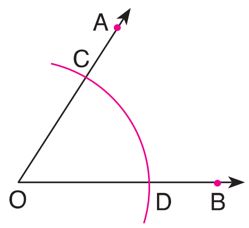
Örnek

Cetvel ile bir açı oluşturalım. Oluşturduğumuz açıyı pergel ve cetvel yardımı ile iki eş açıya ayıralım.

Çözüm

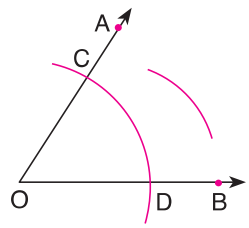
1. Adım

Pergelin sivri ucunu O noktasına koyalım. Açının kollarını C ve D noktasında kesen bir yay çizelim.



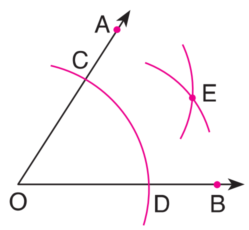
2. Adım

Pergeli |CO| nun yarısından fazla olacak şekilde açalım. Merkezi D olan bir yay çizelim.



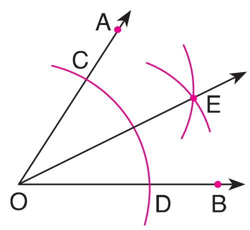
3. Adım

Pergelin açıklığını bozmadan merkezi C olan ve bir önceki yayı kesen bir yay çizelim. Yayların kesim noktasına E diyelim.



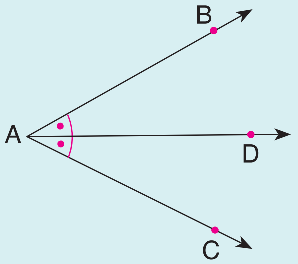
4. Adım

O ile E noktalarını birleştirelim. [OE $\widehat{AOB}$ nı iki eş açıya ayırır.



Bilgi Kutusu

Bir açıyı eş iki parçaya ayıran ışına **açıortay** denir.

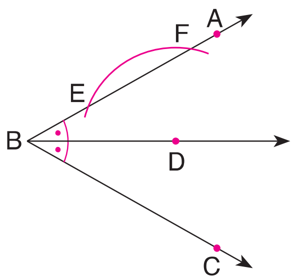


$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD})$ olmak üzere, [AD, $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.

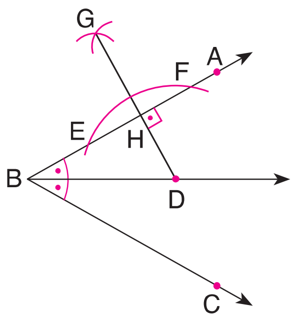
Örnek

Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarını inceleyelim.

Çözüm



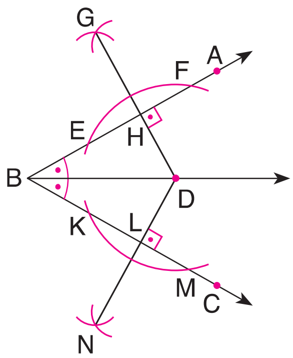
Pergelin sivri ucunu D noktasına koyarak [BA nı E ve F noktalarında kesen bir yay çizelim.



Pergelin sivri ucunu aynı açıklıkta sırası ile E ve F noktalarına koyarak birbirini kesen iki yay çizelim.

Bu kesim noktasına G diyelim. G ve D noktasını birleştirerek [GD] oluşturalım.

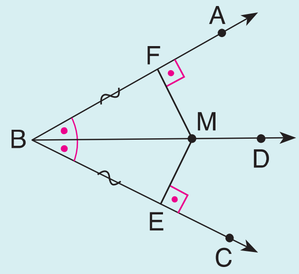
[GD] nın [BA nı kestiği noktaya H diyelim. Burada $[DH] \perp [AB]$ dır.



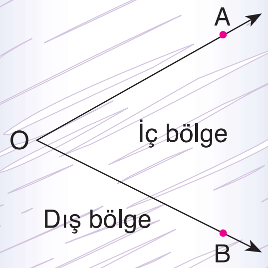
Aynı işlemleri sırası ile [BC için yapalım. Cetvel kullanarak $|DH|$ ve $|DL|$ uzunluğunu ölçersek $|DH| = |DL|$ olduğunu görürüz.

Bilgi Kutusu

- Bir açının açıortayı üzerinde alınan herhangi bir noktadan açının kollarına çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir. Yani $|FM| = |ME|$ dir. Bu teoremin karşıt tersi de doğrudur.

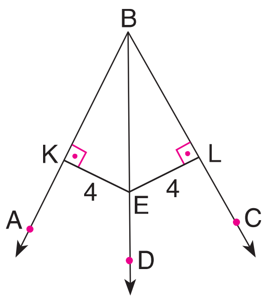


- $\widehat{BFM} \cong \widehat{BEM}$ olduğundan $|BF| = |BE|$ tir.



Bir açının oluşturduğu iç ve dış bölgeler yukarıdaki gibidir.

Örnek



Şekilde $[EK] \perp [BA$, $[EL \perp [BC$,

$|EK| = |EL| = 4$ cm,

$m(\widehat{ABD}) = 3x - 1°$ ve $m(\widehat{DBC}) = x + 19°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

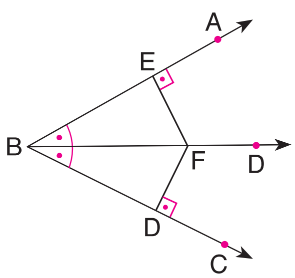
Çözüm

E noktası $\widehat{ABC}$ nın kollarına eşit uzaklıkta olduğundan [BD açıortaydır. Açıortay bir açıyı iki eş açıya ayırdığından $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$ dür.

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) \Rightarrow 3x - 1° = x + 19° \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10°$ olur.

$m(\widehat{ABC}) = (3x - 1)° + (x + 19)° = 4x° + 18° = 4 \cdot 10° + 18° = 58°$ olur.

Örnek



Şekilde [BD $\widehat{ABC}$ na ait açıortaydır.

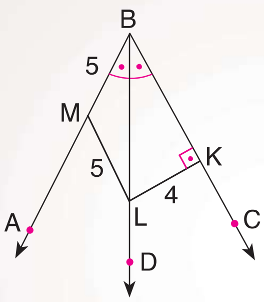
$[EF] \perp [AB]$, $[DF] \perp [BC]$,

$|EF| = (x + 4)$ cm ve $|DF| = (2x - 3)$ cm olduğuna göre x in santimetre cinsinden değerini bulalım.

Çözüm

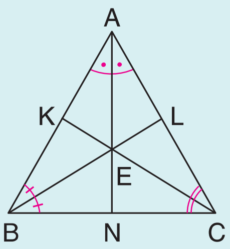
Açıortay üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına uzaklığı eşit olduğunda $|DF| = |EF|$ dur. O hâlde $2x - 3 = x + 4$ ise $x = 7$ cm bulunur.

Sıra Sizde



Şekilde $\widehat{ABC}$ nın açıortayı [BD dır.
$|BM| = |ML| = 5$ cm, $[BK] \perp [KL]$ ve $|KL| = 4$ cm olduğuna göre $|BK|$ kaç santimetredir?

Bilgi Kutusu



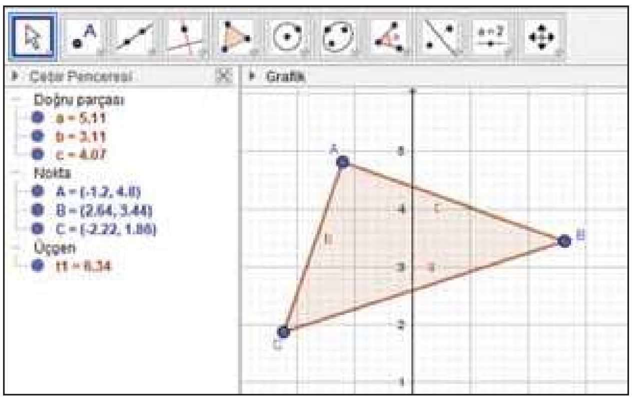
Bir üçgenin bir iç açısını eş iki parçaya ayıran ışının, açının köşesi ile karşı kenar arasında kalan parçasına üçgenin o köşesine ait açıortayı denir. $\widehat{BAC}$ na ait açıortayın uzunluğu n_A ile gösterilir. Üçgenin üç iç açıortayı üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişir.

Örnek

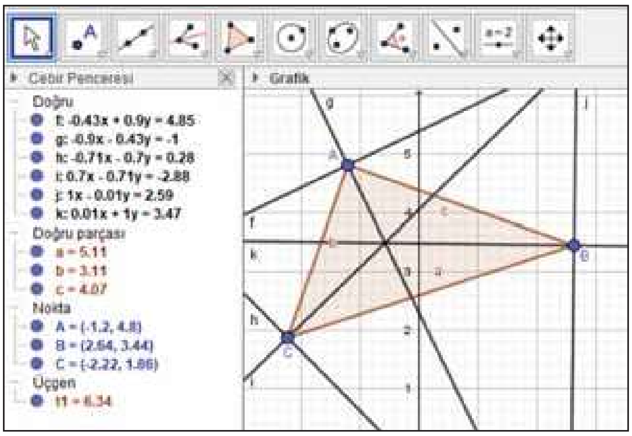
Üçgenin iç açıortayların üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesiştiğini dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.



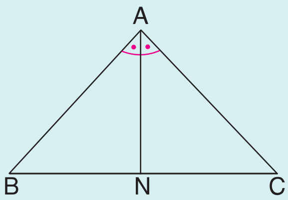
Daha sonra programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Açıortay" kısmına tıklayalım. Ardından üçgenin her bir köşesinde kesişen iki kenara tıklayarak açıortayları oluşturalım.



Sonuç olarak üçgenin iç açıortaylarının üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesiştiği görülmektedir.

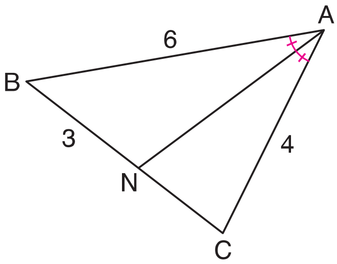
Bilgi Kutusu

İç Açıortay Teoremi



$\widehat{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AN] ise $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|NC|}$ olur.

Örnek

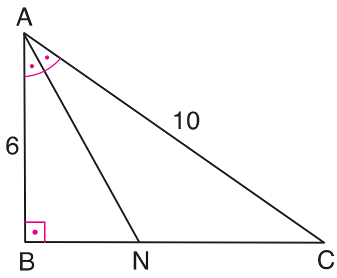


$\widehat{ABC}$ nde [AN], $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.
$|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm, $|BN| = 3$ cm olduğuna göre $|NC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{|NC|} \Rightarrow |NC| = 2$ cm bulunur.

Örnek



ABC dik üçgeninde [AN], $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.

$|AB| = 6$ cm, $|AC| = 10$ cm olduğuna göre $|NC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

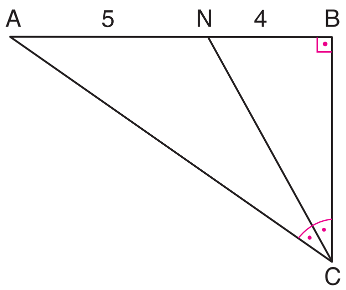
$\widehat{ABC}$ nde $10^2 = 6^2 + |BC|^2 \Rightarrow |BC|^2 = 100 - 36$

$\Rightarrow |BC|^2 = 64 \Rightarrow |BC| = 8$ cm bulunur.

$|NC| = x$ cm ise $|BN| = (8 - x)$ cm olur. İç açıortay teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{8-x}{x} \Rightarrow 6x = 80 - 10x \Rightarrow x = 5 \text{ cm olur.}$$

Örnek



ABC dik üçgeninde [CN], $\widehat{ACB}$ nın açıortayıdır.

$|AN| = 5$ cm, $|BN| = 4$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

İç açıortay teoreminden, $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{|BN|}{|AN|} \Rightarrow \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{4}{5}$ olur.

$x \in \mathbb{R}^+$, $|BC| = 4x$, $|AC| = 5x$ ise $\widehat{ABC}$ nde Pisagor bağıntısından

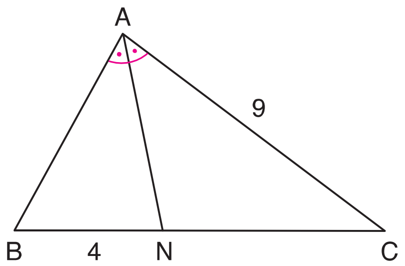
$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 \Rightarrow (5x)^2 = (4x)^2 + 9^2$

$\Rightarrow 25x^2 = 16x^2 + 81$

$\Rightarrow 9x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ olur.

Buradan $|AC| = 5 \cdot x = 5 \cdot 3 = 15$ cm bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde [AN], $\widehat{BAC}$ nın açıortayıdır.

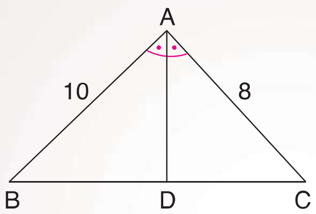
$|AB| = |NC| = x$, $|BN| = 4$ cm, $|AC| = 9$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

İç açıortay teoreminden,

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \text{ cm bulunur.}$$

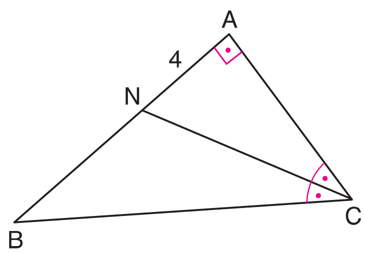
Sıra Sizde



$\widehat{ABC}$ nde [AD], $\widehat{BAC}$ nın iç açıortaydır.

$|AB| = 10$ cm, $|AC| = 8$ cm, $Ç(\widehat{ABC}) = 30$ cm olduğuna göre $|BD|$ kaç santimetredir?

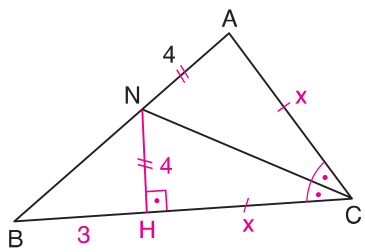
Örnek



ABC dik üçgeninde [CN], $\widehat{ACB}$ nın açıortayıdır.

$|AN| = 4$ cm, $|BC| - |AC| = 3$ cm olduğuna göre $|BN|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



$[NH] \perp [BC]$ olacak şekilde [NH] çizelim. [CN] açıortay olduğundan

$|AN| = |NH| = 4$ cm ve

$|AC| = |HC| = x$ cm olur.

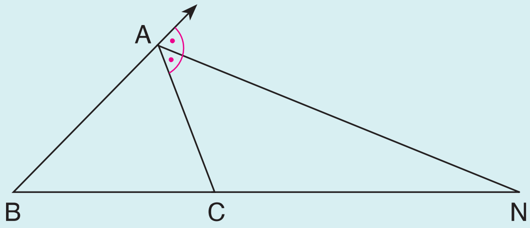
$|AC| = x$ ise $|BC| = (x + 3)$ cm olur.

Bu durumda $|BH| = 3$ cm olur.

$\widehat{BHN}$ nde Pisagor teoreminden, $|BN|^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow |BN| = 5$ cm olur.

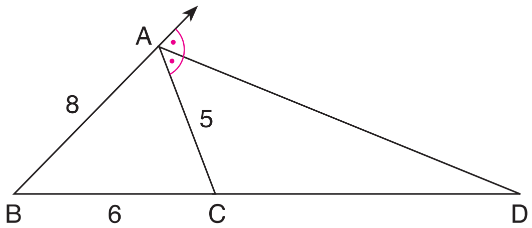
Bilgi Kutusu

Dış Açıortay Teoremi



$\widehat{ABC}$ de A köşesindeki dış açıyı iki eş parçaya ayıran ışının, açının köşesi ile [BC] nın uzantısını kestiği nokta arasında kalan doğru parçasına üçgenin A köşesine ait dış açıortayı denir. Dış açıortayın uzunluğu n'_A ile gösterilir. A köşesine ait dış açıortay [BC] nın uzantısını N noktasına kesiyorsa $\dfrac{|NC|}{|NB|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$ olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde [AD], A köşesine ait dış açıortaydır.

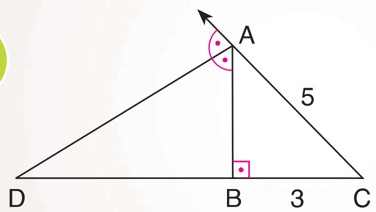
$|AB| = 8$, $|BC| = 6$ cm ve $|AC| = 5$ cm olduğuna göre $|DC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$|DC| = x$ cm olsun. Dış açıortay teoremine göre

$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{5}{8} \Rightarrow 8x = 5x + 30 \Rightarrow x = 10 \text{ cm olur.}$$

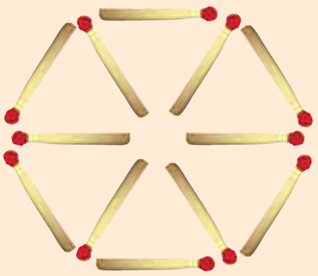
Sıra Sizde



ABC dik üçgeninde A köşesine ait dış açıortay [AD] dır.

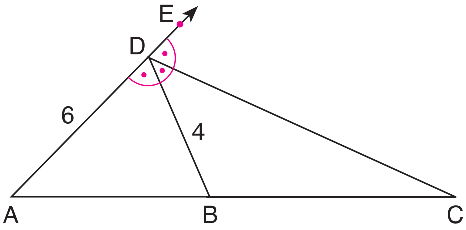
$|AC| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm olduğuna göre $|BD|$ kaç santimetredir?

KİBRİTLER



Yukarıdaki kibritlerden dördünün yerini değiştirerek 3 adet eşkenar üçgen elde edin.

Örnek



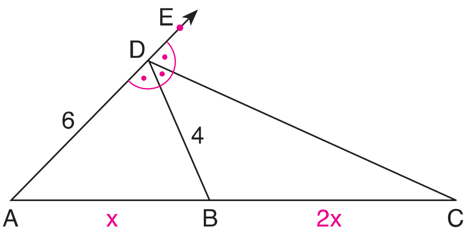
A, D, E noktaları doğrusal, $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{CDE})$, $|AD| = 6$ cm, $|BD| = 4$ cm olduğuna göre $|DC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABD}$ nde [DC], D köşesine ait dış açıortaydır.

O hâlde, $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{|DB|}{|DA|} \Rightarrow \dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ olur.

Buradan $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|BC| = 2x$ ve $|AC| = 3x$ olur.



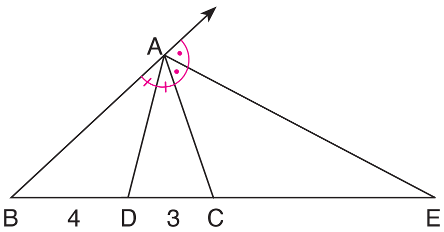
$\widehat{ADC}$ nde [DB], D köşesine ait iç açıortaydır. O hâlde

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

$$\frac{6}{|DC|} = \frac{x}{2x} \Rightarrow \frac{6}{|DC|} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |DC| = 12$ cm olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AD], dış açıortay [AE] dır. $|BD| = 4$ cm, $|DC| = 3$ cm olduğuna göre $|CE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ nde iç açıortay teoremine göre $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{|AB|}{|AC|}$ olur.

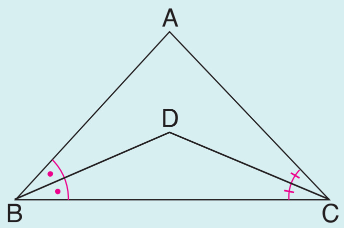
O hâlde $x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|AB| = 4x$, $|AC| = 3x$ olur.

$\widehat{ABC}$ nde dış açıortay teoreminden

$$\frac{|EC|}{|EC| + 7} = \frac{3x}{4x} \Rightarrow \frac{|EC|}{|EC| + 7} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4|EC| = 3|EC| + 21 \Rightarrow |EC| = 21 \text{ bulunur.}$$

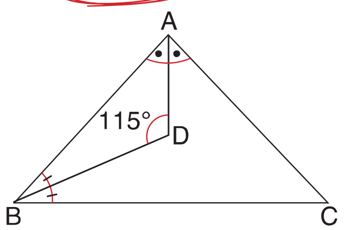
Bilgi Kutusu



$\widehat{ABC}$ nin B ve C köşelerine ait iç açıortayları D noktasında kesişiyor ise

$$m(\widehat{BDC}) = 90° + \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek



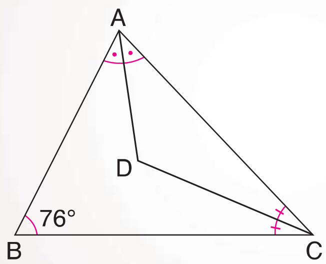
$\widehat{ABC}$ nin A ve B köşelerine ait iç açıortayları D noktasında kesişmiştir. $m(\widehat{ADB}) = 115°$ ise $m(\widehat{ACB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$$m(\widehat{ADB}) = 90° + \frac{m(\widehat{ACB})}{2} \Rightarrow 115° = 90° + \frac{m(\widehat{ACB})}{2}$$

$$\Rightarrow 25° = \frac{m(\widehat{ACB})}{2} \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 50° \text{ olur.}$$

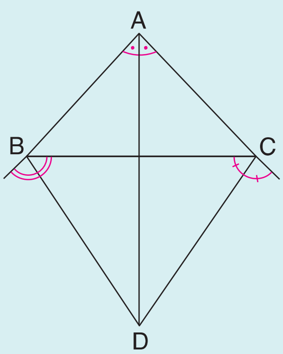
Sıra Sizde



$\widehat{ABC}$ nin A ve C köşelerine ait iç açıortayları D noktasında kesişmiştir.

$m(\widehat{ABC}) = 76°$ ise $m(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?

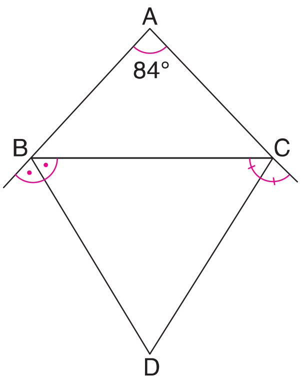
Bilgi Kutusu



$\widehat{ABC}$ nde B ve C köşelerine ait dış açıortay ile A köşesine ait iç açıortay üçgenin dışında bir noktada (D noktasında) kesişir. Bu durumda

$$m(\widehat{BDC}) = 90° - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek



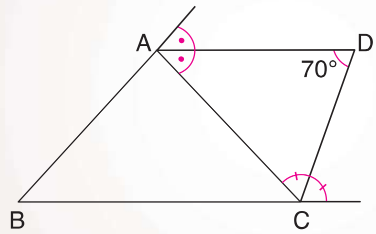
$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 84°$, [BD] ile [CD] bulundukları köşelere ait dış açıortaylar olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$$m(\widehat{BDC}) = 90° - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 90° - \frac{84°}{2} \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 48° \text{ olur}$$

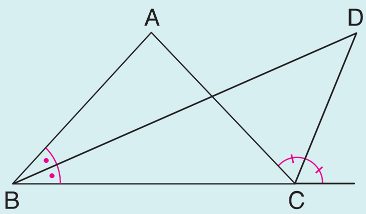
.

Sıra Sizde



$m(\widehat{ADC}) = 70°$, [AD] ile [CD] bulundukları köşelere ait dış açıortaylar ise $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

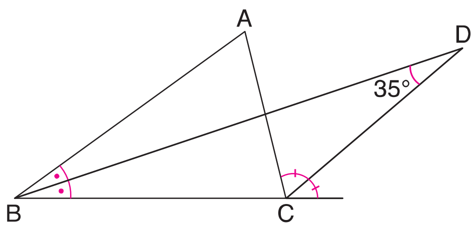
Bilgi Kutusu



$\widehat{ABC}$ nde B köşesine ait iç açıortay ile C köşesine ait dış açıortay D noktasında kesişmiştir. Buna göre

$$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \text{ olur.}$$

Örnek



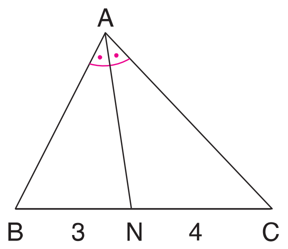
$\widehat{ABC}$ nde B köşesine ait iç açıortay ile C köşesine ait dış açıortay D noktasında kesişmiştir.

$m(\widehat{BDC}) = 35°$ ise $m(\widehat{BAC})$ nü bulalım.

Çözüm

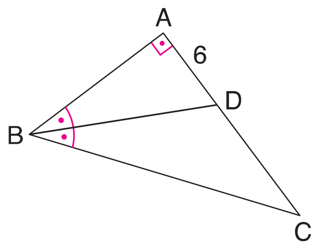
$$m(\widehat{BDC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \Rightarrow 35° = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 70° \text{ bulunur.}$$

1.



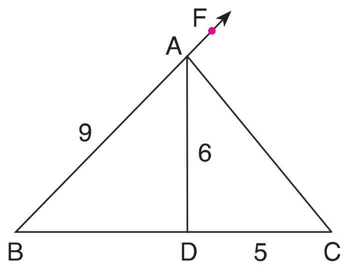
$\widehat{ABC}$ nde [AN], A köşesine ait açıortay, |BN| = 3 cm, |NC| = 4 cm ve Ç($\widehat{ABC}$) = 20 cm olduğuna göre |AB| ve |AC| kaç santimetredir?

2.



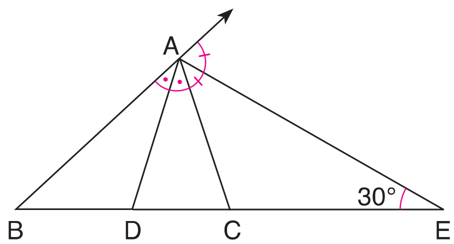
ABC dik üçgeninde [BA] ⊥ [AC], [BD], B köşesine ait açıortay, |AD| = 6 cm, |BC| – |AB| = 8 cm olduğuna göre |DC| kaç santimetredir?

3.



$\widehat{ABD}$ nde [AC], A köşesine ait dış açıortay, |AB| = 9 cm, |AD| = 6 cm ve |DC| = 5 cm olduğuna göre |BD| kaç santimetredir?

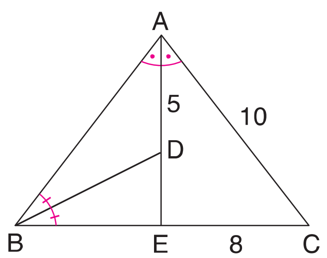
4.



$\widehat{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AD] ve dış açıortay [AE] dır.

m($\widehat{AEC}$) = 30° olduğuna göre m($\widehat{ADE}$) kaç derecedir?

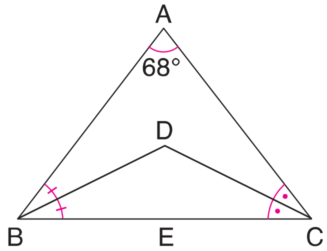
5.



$\widehat{ABC}$ nde [AE], A açısına ait ve [BD], B açısına ait iç açıortaylardır.

|AC| = 10 cm, |AD| = 5 cm ve |EC| = 8 cm olduğuna göre |DE| kaç santimetredir?

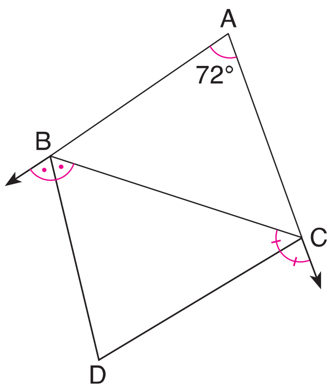
6.



$\widehat{ABC}$ nde B ve C açısına ait iç açıortaylar D noktasında kesişmiştir.

$m(\widehat{BAC}) = 68°$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?

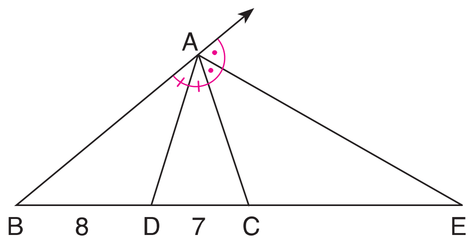
7.



$\widehat{ABC}$ nde B ve C açılarına ait dış açıortaylar D noktasında kesişmiştir.

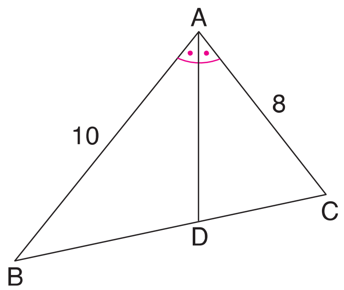
$m(\widehat{BAC}) = 72°$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?

8.



$\widehat{ABC}$ nde A köşesine ait iç açıortay [AD], dış açıortay [AE] dır. $|BD| = 8$ cm, $|DC| = 7$ olduğuna göre $|CE|$ kaç santimetredir?

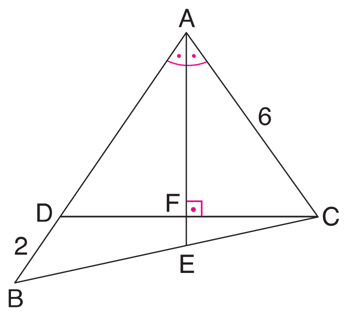
9.



$\widehat{ABC}$ nde [AD], A köşesine ait iç açıortaydır.

$|AB| = 10$ cm ve $|AC| = 8$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

10.



$\widehat{ABC}$ nde [AE], A köşesine ait iç açıortay, $[AE] \perp [DC]$,

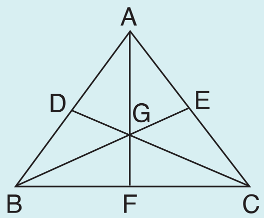
$|DF| = |FC|$, $|AC| = 6$ cm, $|DB| = 2$ cm olduğuna göre

$\dfrac{|BE|}{|EC|}$ kaçtır?

9.4.3.2. Üçgenin Kenarortayları

» Kâğıt katlama yöntemi ile bir üçgenin bir kenarına ait kenarortayı nasıl bulursunuz?

Bilgi Kutusu



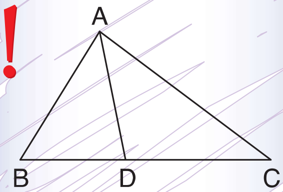
A köşesinden çizilen kenarortay [AF] dır ve V_a ile gösterilir.

B köşesinden çizilen kenarortay [BE] dır ve V_b ile gösterilir.

C köşesinden çizilen kenarortay [CD] dır ve V_c ile gösterilir.

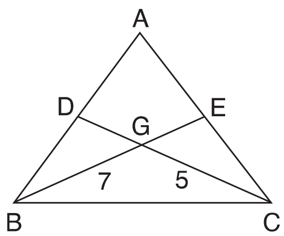
Bir üçgenin kenarortayları üçgenin içinde bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir ve G ile gösterilir. Yukarıdaki şekilde $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G dir ve ağırlık merkezi üçgenin kenarortaylarını 2 ye 1 oranında böler.

$\frac{|AG|}{|GF|} = \frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|CG|}{|GD|} = 2$ olur.



Bir üçgende, bir köşeyi karşısındaki kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına, üçgenin o kenarına ait kenarortayı denir. ABC üçgeninde BC kenarına ait kenarortay [AD] dır.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $|AE| = |EC|$ ve $|AD| = |DB|$ dır. $|BG| = 7$ cm, $|CG| = 5$ cm olduğuna göre $|GD| + |GE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

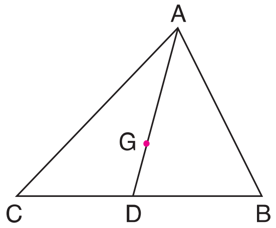
Çözüm

D ve E noktaları bulundukları kenarların orta noktaları olduğundan G, ağırlık merkezidir.

O hâlde $|GD| = \frac{|CG|}{2} = \frac{5}{2}$ cm ve $|GE| = \frac{|BG|}{2} = \frac{7}{2}$ cm olur.

Buradan $|GD| + |GE| = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6$ cm bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezi G noktasıdır.

$|AG| = (3x + 4)$ cm, $|GD| = (x + 5)$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

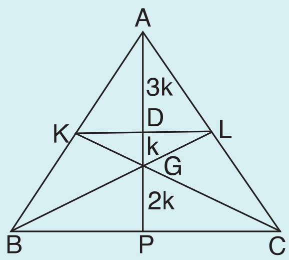
G noktası ağırlık merkezi olduğundan

$\dfrac{|AG|}{|GD|} = 2 \Rightarrow \dfrac{3x+4}{x+5} = 2 \Rightarrow 3x + 4 = 2x + 10 \Rightarrow x = 6$ bulunur.

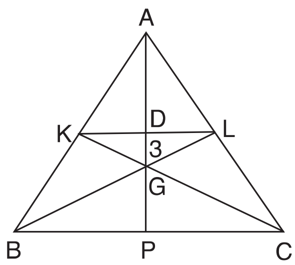
Buradan $|AD| = (3x + 4) + (x + 5) = 4x + 9 = 4 \cdot 6 + 9 = 33$ cm bulunur.

Bilgi Kutusu

Üçgenin ağırlık merkezi ile orta tabanın kenarortay üzerinde ayırdığı uzunluklar köşeden başlamak üzere 3, 1 ve 2 sayılarıyla orantılıdır.



Örnek



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

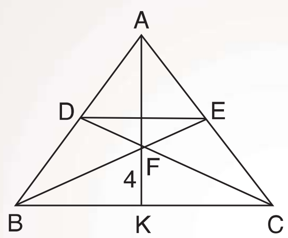
$|DG| = 3$ cm olduğuna göre $|AP|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

G ağırlık merkezi olduğundan $|AD| = 3k$, $|DG| = k$ ve $|GP| = 2k$ olur.

$|DG| = k = 3$ cm olduğundan $|AP| = 3k + k + 2k = 6k = 6 \cdot 3 = 18$ cm olur.

Sıra Sizde



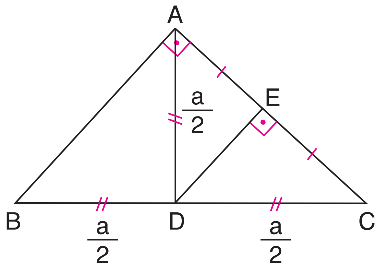
Şekilde D ve E noktaları üzerinde bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$|FK| = 4$ cm olduğuna göre $|AK|$ kaç santimetredir?

Örnek

Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun, hipotenüs uzunluğunun yarısı olduğunu gösterelim.

Çözüm



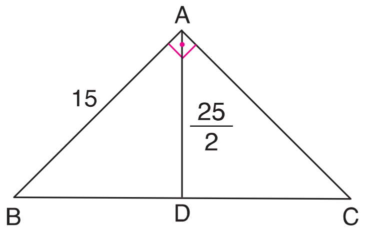
ABC dik üçgeninde [AD] kenarortay olsun. D noktasından [AB] // [DE] olacak şekilde [DE] nı çizelim.

[AB] // [DE] ve $|BD| = |DC|$ olduğundan $|AE| = |EC|$ ve $[DE] \perp [AC]$ olur.

$|BC| = a$ olsun.

$\widehat{ADC}$ nde [DE] hem yükseklik hem kenarortay olduğundan $\widehat{ADC}$ ikizkenar üçgendir ve $|AD| = |DC| = \frac{a}{2}$ olur. Buradan $|AD| = \frac{a}{2}$ olur.

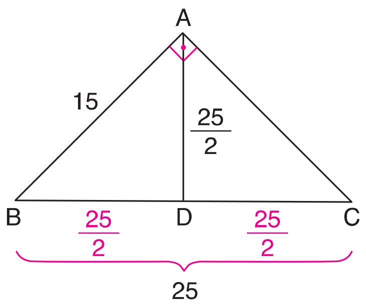
Örnek



ABC dik üçgeninde D noktası üzerinde bulunduğu kenarın orta noktasıdır.

$|AB| = 15$ cm, $|AD| = \frac{25}{2}$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



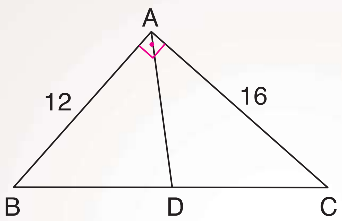
$[AB] \perp [AC]$ olduğundan

$|AD| = |BD| = |DC| = \frac{25}{2}$ cm olur.

ABC dik üçgeninde Pisagor bağıntısından,

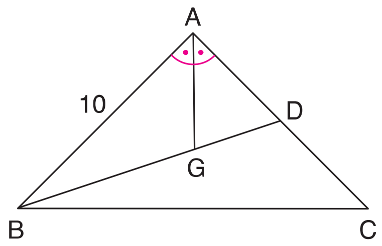
$$25^2 = 15^2 + |AC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 625 - 225$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = 400$$
$$\Rightarrow |AC| = 20 \text{ cm olur.}$$

Sıra Sizde



ABC dik üçgeninde $|BD| = |DC|$, $|AB| = 12$ cm, $|AC| = 16$ cm olduğuna göre $|AD|$ kaç santimetredir?

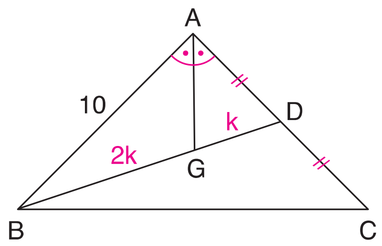
Örnek



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

[AG], A köşesine ait iç açıortay ve $|AB| = 10$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



G ağırlık merkezi ise $\dfrac{|BG|}{|GD|} = 2$ olduğundan $|BG| = 2k$ ve $|GD| = k$ olur.

$\widehat{ABD}$ nde [AG] açıortay ise

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BG|}{|GD|} \Rightarrow \frac{10}{|AD|} = \frac{2k}{k} \Rightarrow 2|AD| = 10 \Rightarrow |AD| = 5 \text{ cm olur.}$$

Bu durumda $|AC| = |AD| + |DC| = 5 + 5 = 10$ cm bulunur.

Örnek

Üçgen çeşitlerine bağlı olarak üçgen üzerinde yapılan değişikliklerin kenarortaylar üzerindeki etkisini dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu"bölümünde "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.

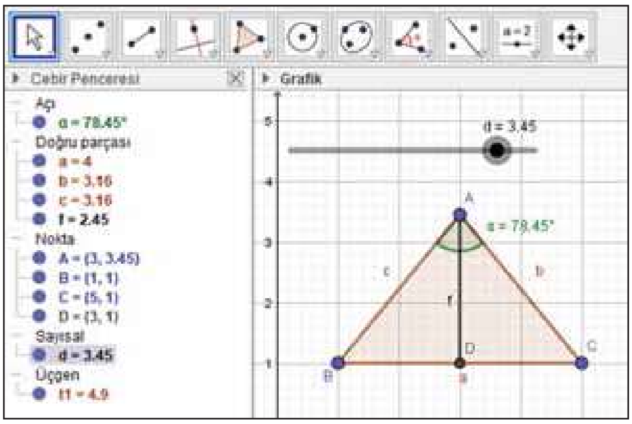
"Araç Çubuğu" bölümünden "Taşı" kısmına tıklayalım ve ardından grafik penceresindeki A noktasına çift tıklayalım. Bu noktanın ikinci bileşeni yerine d yazalım.

Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Sürgü" kısmına tıklayalım, açılan pencerede "Ad" kısmına d yazarak "Tamam" butonuna basalım.

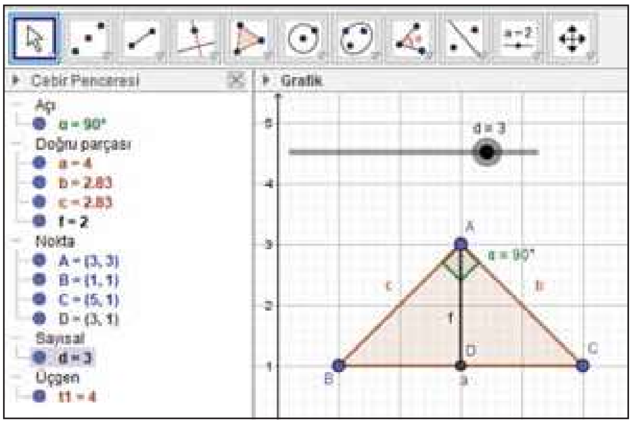
Ardından "Araç Çubuğu" bölümünden "Açı" kısmına tıklayarak A köşesindeki açıyı belirleyelim. "Araç Çubuğu" bölümünden "Orta Nokta ve Merkez" kısmına tıklayalım. Daha sonra BC doğru parçasına tıklayarak orta noktası olan D noktasını belirleyelim.

"Araç Çubuğu" bölümünden "Doğru Parçası" kısmına tıklayarak A ve D noktalarını birleştirelim. Böylece BC kenarına ait kenarortay olan AD doğru parçasını oluşturalım.

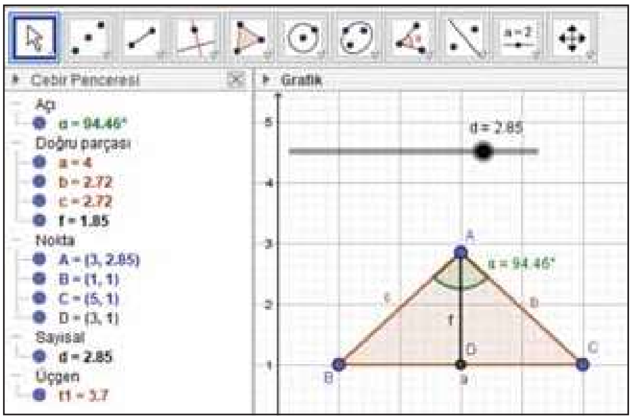
A açısının ölçüsü 90° den küçük iken $|AD| > \frac{|BC|}{2}$ olur.



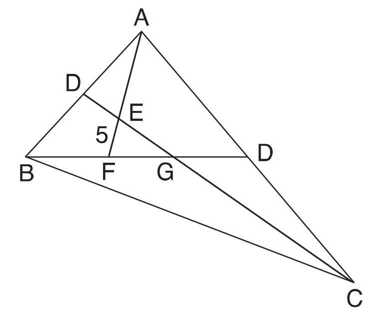
A açısının ölçüsü 90° iken $|AD| = \frac{|BC|}{2}$ olur.



A açısının ölçüsü 90° den büyük iken $|AD| < \frac{|BC|}{2}$ olur.



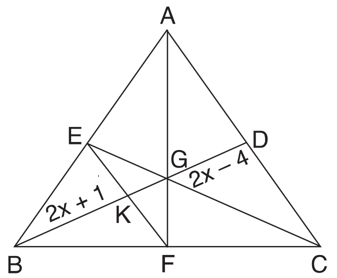
1.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

$|FG| = |GD|$ ve $|FE| = 5$ cm olduğuna göre $|AE|$ kaç santimetredir?

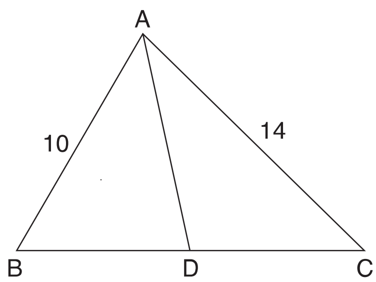
2.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

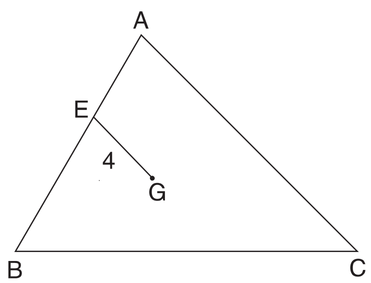
$|BK| = (2x + 1)$ cm ve $|GD| = (2x - 4)$ cm olduğuna göre $|KG|$ kaç santimetredir?

3.



$\widehat{ABC}$ nde $|BD| = |DC|$, $|AB| = 10$ cm ve $|AC| = 14$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerleri kaç tanedir?

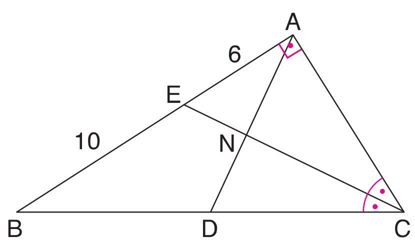
4.



G noktası $\widehat{ABC}$ nin ağırlık merkezidir.

$[EG] \parallel [AC]$, $|EG| = 4$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?

5.



ABC dik üçgeninde $|AE| = 6$ cm, $|EB| = 10$ cm, $|BD| = |DC|$ ve $[CE]$, $\widehat{ACB}$ nın açıortayı olduğuna göre $|AN|$ kaç santimetredir?

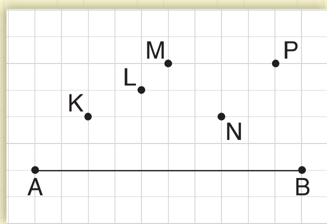
6. $\widehat{MLK}$ için $m(\widehat{M}) = 90°$ dir.

Bu üçgenin ağırlık merkezinin hipotenüse uzaklığı 5 cm olduğuna göre M köşesinin hipotenüse olan uzaklığı kaç santimetredir?

9.4.3.3. Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri

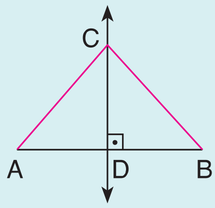
Bir doğru parçasına orta noktasından dik olan doğruya orta dikme denir.

» Yanda kareli zeminde verilen [AB] nın orta dikmesi verilen noktalardan hangisinden geçer?

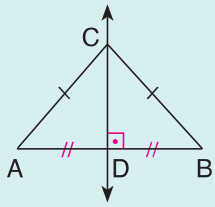


Bilgi Kutusu

- Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır. CD doğrusu [AB] nin orta dikmesi ise $|AC| = |BC|$ olur.



- Bir doğru parçasının uç noktalarından eşit uzaklıkta bulunan her nokta bu doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir. Eğer $|CA| = |CB|$ ise C noktası [AB] nin orta dikmesi üzerindedir.



Örnek

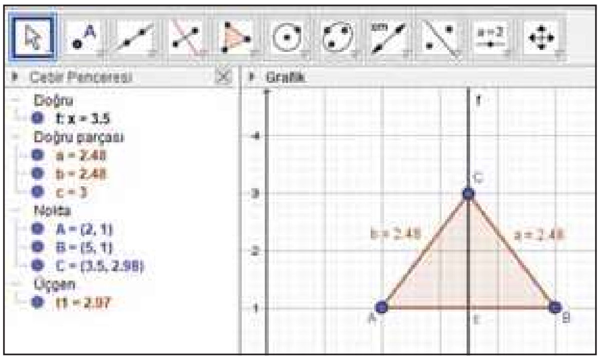
Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her noktanın, bu doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Doğru Parçası" kısmına tıklayarak grafik penceresinde bir AB doğru parçası oluşturalım.

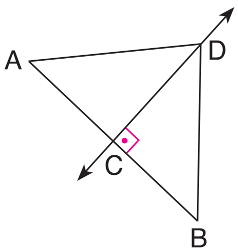
Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünden "Orta Dikme" kısmına tıklayalım. Ardından AB doğru parçası üzerine tıklayarak bu doğru parçasına ait orta dikme doğrusunu oluşturalım. Bu orta dikme üzerinde bir C noktası belirleyerek ACB üçgeni oluşturalım.

"Araç Çubuğu" bölümünden "Uzaklık veya Uzunluk" kısmına tıklayarak AC ve CB kenarlarının uzunluklarını gösterelim.



Sonuç olarak bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her noktanın, bu doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olduğu görülmektedir.

Örnek



Şekilde DC doğrusu, [AB] nın orta dikmesi ve $|AD| = (2x + 18)$ cm, $|BD| = (4x + 4)$ cm olduğuna göre $|AD|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm

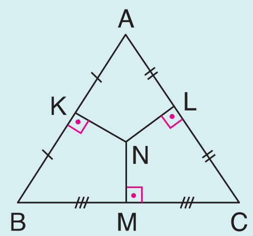
Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan her nokta doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıkta olduğundan $|AD| = |BD|$ olur.

Buradan $4x + 4 = 2x + 18 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$ bulunur.

O hâlde $|AD| = 2x + 18 = 2 \cdot 7 + 18 = 32$ cm bulunur.

Bilgi Kutusu

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir. Üçgenin kenar orta dikmeleri bir noktada kesişir.



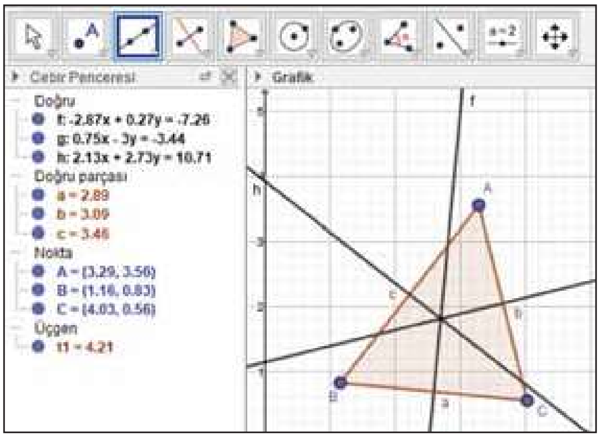
Örnek

Üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiğini dinamik matematik programı yardımıyla gösterelim.

Çözüm

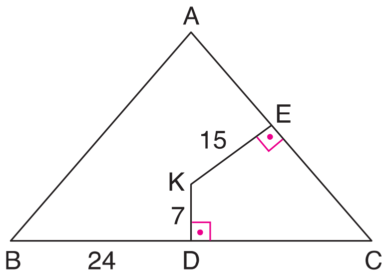
Dinamik matematik programlarından GeoGebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım.

Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek ABC üçgeni oluşturalım. Daha sonra "Araç Çubuğu" bölümünde "Orta Dikme" kısmına tıklayalım. Ardından üçgenin her bir kenarına ayrı ayrı tıklayarak bu kenarlara ait kenar orta dikmeleri oluşturalım.



Sonuç olarak üçgenin kenar orta dikmelerinin bir noktada kesiştiği görülmektedir.

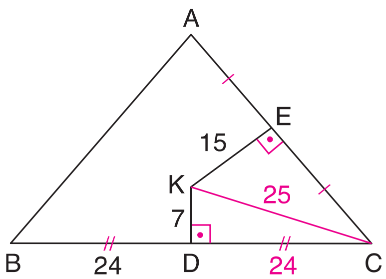
Örnek



[KD] ve [KE] $\widehat{ABC}$ nin kenar orta dikmeleridir.

$|KE| = 15$ cm, $|KD| = 7$ cm ve $|BD| = 24$ cm olduğuna göre $|AE|$ nun kaç santimetre olduğunu bulalım.

Çözüm



[KD] ve [KE] kenar orta dikme olduğundan

$|BD| = |DC|$ ve $|AE| = |EC|$ olur. O hâlde $|DC| = 24$ cm olur.

K ve C noktalarını birleştirelim.

$\widehat{KDC}$ nde Pisagor bağıntısından

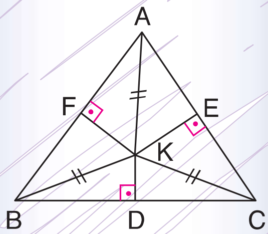
$|KC|^2 = 7^2 + 24^2 \Rightarrow |KC|^2 = 49 + 576 \Rightarrow |KC|^2 = 625 \Rightarrow |KC| = 25$ cm olur.

$\widehat{KEC}$ nde Pisagor bağıntısından

$25^2 = 15^2 + |EC|^2 \Rightarrow |EC|^2 = 625 - 225 \Rightarrow |EC|^2 = 400 \Rightarrow |EC| = 20$ cm olur.

O hâlde $|AE| = |EC|$ olduğundan $|AE| = 20$ cm bulunur.

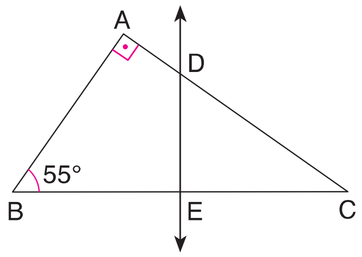
!



Bir üçgenin kenar orta dikmelerinin kesişim noktası üçgenin köşe noktalarından eşit uzaklıktadır.

K noktası ABC nin kenar orta dikmelerinin kesim noktası ise $|AK| = |KB| = |KC|$ olur.

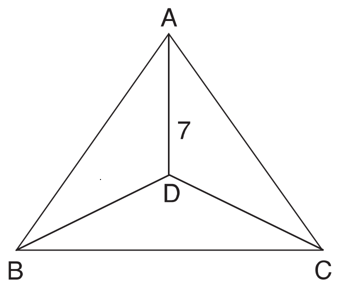
1.



ABC üçgeninde DE doğrusu, BC kenarına ait kenar orta dikmedir.

$m(\widehat{BAC}) = 90°$, $m(\widehat{ABC}) = 55°$ ise $m(\widehat{EDC})$ kaç derecedir?

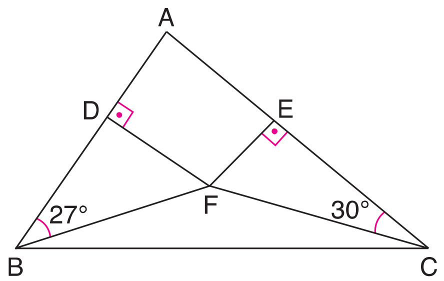
2.



D noktası $\widehat{ABC}$ nin kenar orta dikmelerinin kesim noktasıdır.

$|AD| = 7$ cm olduğuna göre $|AD| + |BD| + |DC|$ kaç santimetredir?

3.



$\widehat{ABC}$ nde [FD] ve [FE] kenar orta dikmelerdir.

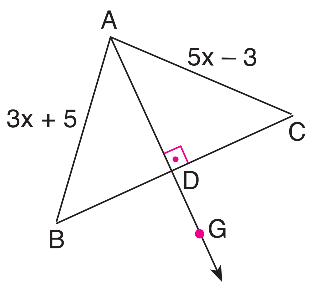
$m(\widehat{DBF}) = 27°$ ve $m(\widehat{ECF}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

4.

Aksaray, Nevşehir ve Niğde il merkezlerine eşit uzaklıkta olacak şekilde bir alışveriş merkezi yapılmak isteniyor. Yandaki şekilde bu şehirlerin konumları verilmiştir.

Buna göre alışveriş merkezinin nereye yapılması gerektiğini çizimle gösteriniz.

5.



Yandaki şekilde $[AG] \perp [BC]$, $|BD| = |DC|$,

$|AB| = (3x + 5)$ cm ve $|AC| = (5x - 3)$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç santimetredir?