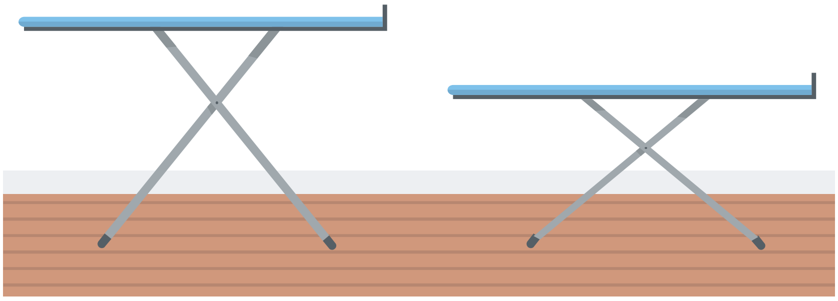
Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Açılar ve üçgenler sıvacılık, döşemecilik, duvar kaplamacılığı, mermercilik, fotoğrafçılık, avize imalatçılığı, terzilik, seramik ve çinicilik, diş protezciliği, halıcılık, ayakkabıcılık, dericilik gibi birçok meslek dalında kullanılır. Ayrıca bayındırlık ve zanaatla ilgili teknik çalışmalarda, endüstriyel alanlarda, güzel sanatlarda, mimaride, mühendislikte, haritacılıkta, simülasyonlarda ve daha birçok alanda karşımıza çıkar.

9.4.1. ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR



Ütü masasının altında destek sağlayan ayaklarla zemin arasında kalan bölge bir üçgene benzemektedir. Ütü masası alçaldıkça ayakları arasındaki mesafe artar. Ancak ayaklar ortadan sabitlendiği için yanda kalan demirlerin uzunlukları değişmez. Ayaklarla masa arasında kalan üçgenin yan kenarları aynı uzunlukta kalırken ayaklar arasındaki mesafe değişmektedir. Masayı farklı yüksekliklere getirdiğimizde farklı üçgenler elde edilecektir.

- Bir üçgende iki kenarın uzunluğu değişmediği hâlde üçüncü kenarın uzunluğunun değişmesini nasıl açıklarsınız?
- Ütü masasının ayaklarının oluşturduğu açılardan eşit olanları belirleyiniz.

9.4.1.1. Üçgende Açı Özellikleri ile İlgili İşlemler

Açı Çeşitleri, Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar

Sembol ve Gösterimler

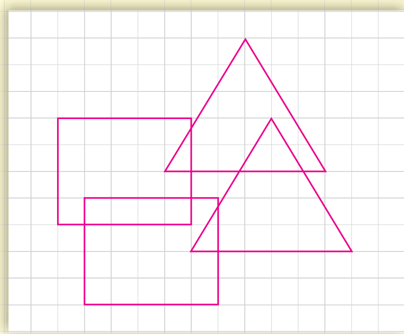
$\overset{\triangle}{ABC}$

$\widehat{ABC}$

$m(\widehat{ABC})$

$[AB]$

$|AB|$



» Yukarıdaki görselde yer alan açı çeşitlerini belirleyiniz.

Örnek

$\widehat{ABC}$ geniş açı ve $m(\widehat{ABC}) = 3x - 18°$ dir.

x bir tam sayı olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün en büyük değeri kaç derecedir? Bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ geniş açı ise $90° < m(\widehat{ABC}) < 180°$ dir. O hâlde
$90° < 3x - 18° < 180° \Rightarrow 108° < 3x < 198° \Rightarrow 36° < x < 66°$ bulunur. Bu durumda x in en büyük tam sayı değeri 65° olup $m(\widehat{ABC})$ nün en büyük değeri $m(\widehat{ABC}) = 3x - 18° = 3 \cdot 65° - 18° = 177°$ dir.

Örnek

Ölçüsü $6x - 12°$ olan açı dik açıdır.

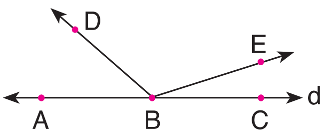
Buna göre ölçüsü $9x - 65°$ olan açının çeşidini bulalım.

Çözüm

$6x - 12° = 90° \Rightarrow 6x = 102° \Rightarrow x = 17°$ dir.

Buna göre $9x - 65° = 9 \cdot 17° - 65° = 153° - 65° = 88°$ olup açı dar açıdır.

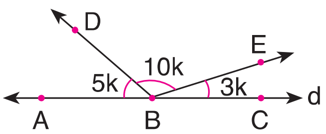
Örnek



$\widehat{DBE}$ nın B köşesi d doğrusunun üzerindedir.

$3 \cdot m(\widehat{DBE}) = 6 \cdot m(\widehat{ABD}) = 10 \cdot m(\widehat{EBC})$ olduğuna göre $m(\widehat{DBC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$3 \cdot m(\widehat{DBE}) = 6 \cdot m(\widehat{ABD}) = 10 \cdot m(\widehat{EBC})$

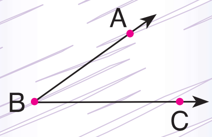
EBOB(3,6,10) = 60 olduğundan

$m(\widehat{DBE}) = 10k$, $m(\widehat{ABD}) = 5k$ ve

$m(\widehat{EBC}) = 3k$ olur.

$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu bütünler açılardır. O hâlde $5k + 10k + 3k = 180°$ $\Rightarrow 18k = 180° \Rightarrow k = 10°$ ve $m(\widehat{DBC}) = 13k = 13 \cdot 10 = 130°$ bulunur.

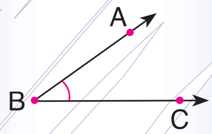
! Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının arasında kalan bölgeye açı denir.



Buradaki açı $\widehat{ABC}$ veya $\widehat{CBA}$ olarak gösterilebilir.

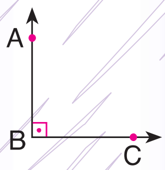
! $(\widehat{ABC})$ nın ölçüsü $m(\widehat{ABC})$ ile gösterilir.

! **Dar açı:** Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açıya denir.



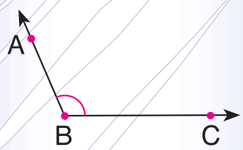
$0° < m(\widehat{ABC}) < 90°$ dir.

Dik açı: Ölçüsü 90° olan açıya denir.



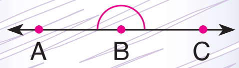
$m(\widehat{ABC}) = 90°$ dir.

Geniş açı: Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açıya denir.

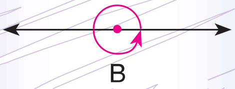


$90° < m(\widehat{ABC}) < 180°$ dir.

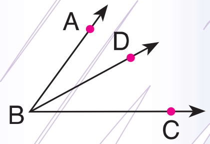
Doğru Açı: Ölçüsü 180° olan açıya denir.



Tam Açı: Ölçüsü 360° olan açıya denir.



Komşu Açılar: Birer kolu ortak olan açılara denir.

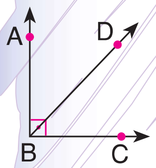


$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu açılardır.

Tümler Açılar: Ölçüleri toplamı 90° olan açılara denir.

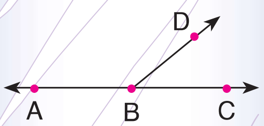
Bütünler Açılar: Ölçüleri toplamı 180° olan açılara denir.

Komşu Tümler Açılar: Ölçüleri toplamı 90° olan komşu açılara denir.



$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu tümler açılardır.

Komşu Bütünler Açılar: Ölçüleri toplamı 180° olan komşu açılara denir.



$\widehat{ABD}$ ile $\widehat{DBC}$ komşu bütünler açılardır.

Örnek

Bir açının bütünler açısının ölçüsü kendisinden 30° fazladır.

Bu açının ölçüsünün, tümler açısının ölçüsünün kaç katı olduğunu bulalım.

Çözüm

Açının ölçüsüne x dersek bütünler açısının ölçüsü 180° – x olur.

$180° - x = x + 30° \Rightarrow 2x = 150° \Rightarrow x = 75°$ dir.

Ölçüsü 75° olan açının tümler açısının ölçüsü $90° - 75° = 15°$ dir.

O hâlde ölçüsü 75° olan açı tümler açısının ölçüsünün 5 katıdır.

Örnek

$m(\widehat{ABC}) = a + 184°$ ve $m(\widehat{KLM}) = b - 64°$ dir.

$\widehat{ABC}$ tam açı, $\widehat{KLM}$ doğru açı olduğuna göre a + b nin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

$\widehat{ABC}$ tam açı olduğundan $a + 184° = 360° \Rightarrow a = 176°$ ve

$\widehat{KLM}$ doğru açı olduğundan $b - 64° = 180° \Rightarrow b = 244°$ dir.

O hâlde $a + b = 176° + 244° = 420°$ bulunur.

Sıra Sizde

Bütünler açısının ölçüsü, tümler açısının ölçüsünün 5 katı olan açı kaç derecedir?

Örnek

Bütünler iki açının oranı $\frac{2}{7}$ dir.

Bu açıların ölçüleri arasındaki farkı bulalım.

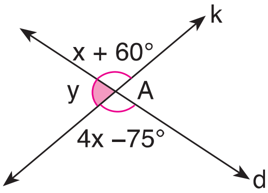
Çözüm

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere açıların ölçüleri 2k ve 7k olur.

Açılar bütünler olduğu için $2k + 7k = 180° \Rightarrow 9k = 180° \Rightarrow k = 20°$ dir.

Bu açıların ölçüleri arasındaki fark $7k - 2k = 5k = 5 \cdot 20° = 100°$ olur.

Örnek



Şekilde d ∩ k = {A} dır.

Verilen açı ölçülerine göre y nin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

Ölçüleri 4x – 75° ve x + 60° olan açılar ters açılardır ve ölçüleri eşittir.

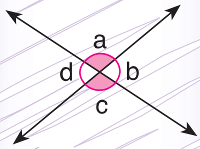
$4x - 75° = x + 60° \Rightarrow 3x = 135° \Rightarrow x = 45°$ olur.

$x + 60° = 45° + 60° = 105°$ dir.

Ölçüsü 105° ve y olan açılar komşu bütünler açılardır.

Buna göre $y = 180° - 105° = 75°$ bulunur.

Ters Açılar

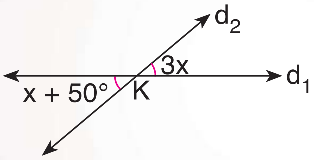


Birbirini kesen iki doğrunun oluşturduğu komşu olmayan açılardır.

Ters açıların ölçüleri eşittir.

a = c ve b = d dir.

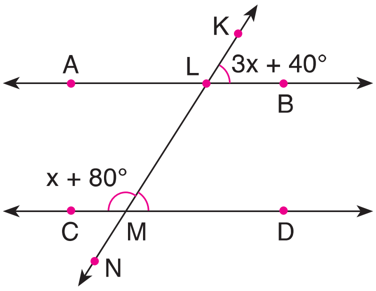
Sıra Sizde



Şekilde $d_1 \cap d_2 = \{K\}$ dir.

Verilen açı ölçülerine göre x kaç derecedir?

Örnek

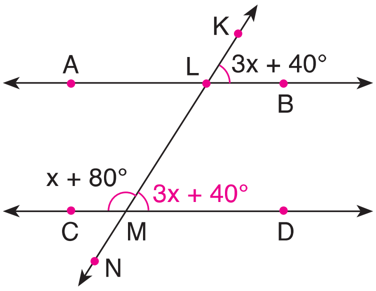


Şekilde KN doğrusu, birbirine paralel olan AB ve CD doğrularını kesmektedir.

$m(\widehat{KLB}) = 3x + 40°$ ve

$m(\widehat{KMC}) = x + 80°$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

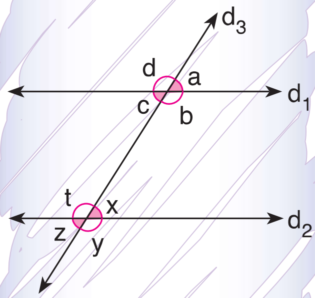


$\widehat{KLB}$ ile $\widehat{KMD}$ yöndeş açılar olduğundan $m(\widehat{KMD}) = 3x + 40°$ dir.

$\widehat{KMC}$ ile $\widehat{KMD}$ komşu bütünler açılar olduğundan toplamları 180° dir. Buradan

$x + 80° + 3x + 40° = 180° \Rightarrow x = 15°$ bulunur.

Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar



$d_1 \parallel d_2$ ve d_3 bu doğruları kesen bir doğrudur.

- a ile x, b ile y, d ile t, c ile z yöndeş açılar olup ölçüleri eşittir.

  a = x, b = y,

  d = t, c = z

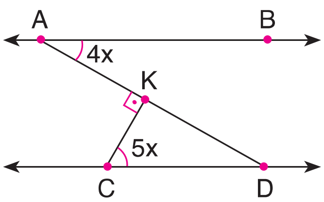
- c ile x, b ile t iç ters açılar olup ölçüleri eşittir.

  c = x, b = t

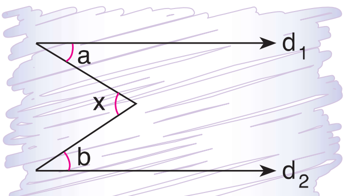
- a ile z, d ile y dış ters açılar olup ölçüleri eşittir.

  a = z, d = y

Örnek

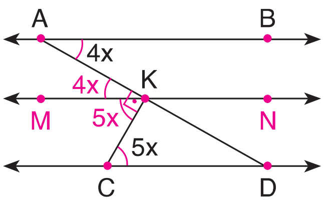


Şekilde AB // CD ve [CK] ⊥ [AD] dır. $m(\widehat{BAD}) = 4x$ ve $m(\widehat{KCD}) = 5x$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulalım.



$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow x = a + b$ dir.

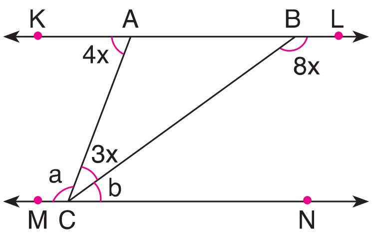
Çözüm



AB // CD // MN olacak şekilde MN doğrusunu çizdiğimizde $\widehat{AKM}$ ile $\widehat{BAD}$, $\widehat{MKC}$ ile $\widehat{KCD}$ iç ters açılardır.

Buradan $m(\widehat{AKM}) = 4x$, $m(\widehat{MKC}) = 5x$ olur. $4x + 5x = 90° \Rightarrow x = 10°$ bulunur.

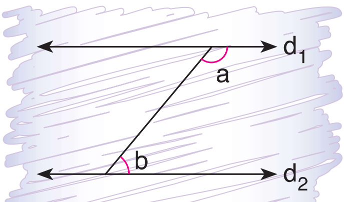
Örnek



Şekilde A ve B noktaları KL doğrusunun, C noktası MN doğrusunun üzerinde ve KL // MN dir.

$m(\widehat{KAC}) = 4x$, $m(\widehat{LBC}) = 8x$, $m(\widehat{ACB}) = 3x$, $m(\widehat{ACM}) = a$, $m(\widehat{BCN}) = b$ olduğuna göre a – b nin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow a + b = 180°$ dir.

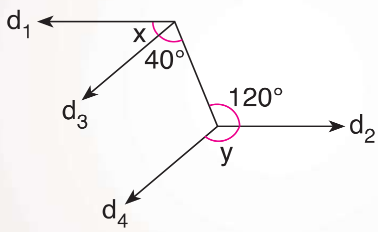
$b + 8x = 180° \Rightarrow b = 180° - 8x$, $a + 4x = 180° \Rightarrow a = 180° - 4x$ olur.

$\widehat{MCN}$ doğru açı olduğundan

$180 - 4x + 3x + 180 - 8x = 180 \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 20°$ bulunur.

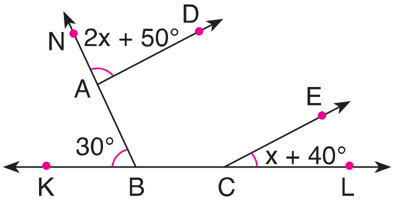
$a - b = (180° - 4x) - (180° - 8x) = 4x = 4 \cdot 20° = 80°$ olur.

Sıra Sizde



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ ve $d_3 \parallel d_4$ tür. Verilen ölçülere göre x + y kaç derecedir?

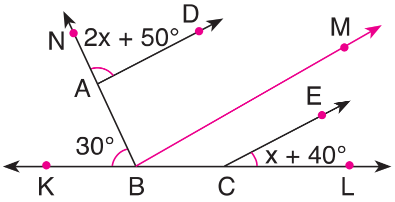
Örnek



Şekilde K, B, C, L doğrusal noktalar ve [AD // [CE dır.

$m(\widehat{NBK}) = 30°$, $m(\widehat{ECL}) = x + 40°$ ve $m(\widehat{NAD}) = 2x + 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{KCE})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{NBK}$ ile $\widehat{NBL}$ komşu bütünler açılar olup

$m(\widehat{NBL}) = 180° - 30° = 150°$ dir.

[AD // [CE // [BM olacak şekilde [BM çizersek $\widehat{MBL}$ ile $\widehat{ECL}$, $\widehat{NAD}$ ile $\widehat{NBM}$ yöndeş açılar olur.

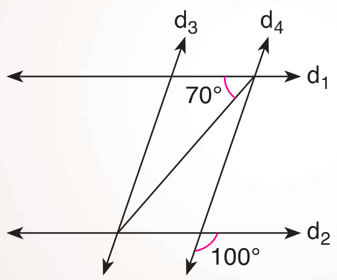
Bu durumda $m(\widehat{MBL}) = x + 40°$ ve $m(\widehat{NBM}) = 2x + 50°$ olur.

$m(\widehat{NBL}) = m(\widehat{NBM}) + m(\widehat{MBL})$ ise

$150° = 2x + 50° + x + 40° \Rightarrow 3x = 60° \Rightarrow x = 20°$ dir.

$m(\widehat{ECL}) = 20° + 40° = 60°$ olup $m(\widehat{KCE}) = 180° - 60° = 120°$ bulunur.

Sıra Sizde



Şekilde $d_1 // d_2$ ve $d_3 // d_4$ tür.
Verilen ölçülere göre x kaç derecedir?

Mustafa Kemal Atatürk (1881-1938)

Mustafa Kemal Atatürk, 1936-1937 yıllarında Dolmabahçe Sarayı'nda kendi el yazısı ile kaleme aldığı 44 sayfalık geometri kitabında anlaşılması güç olan terimlere Türkçe karşılıklar bularak, geometrinin bugün kolay bir şekilde yazılıp anlaşılmasını sağlamıştır. Bu kitap 1937 yılında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yazar adı belirtilmeden yayınlanmış, 1971 yılında da kitabın ikinci baskısı Türk Dil Kurumu tarafından çıkarılmıştır. Atatürk'ün kendi türettiği terimler ve tanımların büyük bölümü bugüne kadar değişmeden kullanılmıştır.

Üçgenlerde Açılar

27°	43°	62°	111°	113°	68°
93°	26°	115°	19°	3°	40°

Dört üçgene ait olan iç açıların ölçüleri yukarıda karışık şekilde verilmiştir.

» Bu açı ölçülerini aynı üçgenin iç açılarının ölçüleri olacak şekilde üçerli gruplandırınız.

Mustafa Kemal Atatürk'ün Geometri kitabında önerdiği ve hâlâ kullanılan bazı terimlerin Osmanlıcası ve Türkçesi şunlardır:

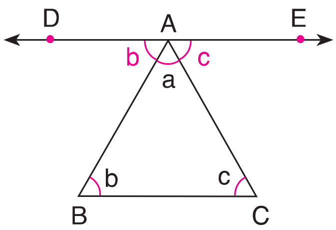
Osmanlıcası	Türkçesi
Zâviye	Açı
Dılı	Kenar
Mesâha-i sathiyye	Alan
Zâviye-i hadde	Dar açı
Murabba	Kare
Hatt-ı munassıf	Açıortay
Şibh-ı münharif	Yamuk
Nısf-ı kutur	Yarıçap

❉ Atatürk'ün geometriye kazandırdığı bu terimlerin İngilizce karşılıklarını söyleyiniz. Bu terimlerin anlamlarını İngilizce açıklayınız.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu gösterelim.

Çözüm



[BC] // DE olacak şekilde A noktasından geçen DE doğrusunu çizersek $\widehat{EAC}$ ile $\widehat{ACB}$ nın; $\widehat{DAB}$ ile $\widehat{ABC}$ nın iç ters açılar olduğu görülür.

Üçgenin iç açılarını ölçüsü a, b, c olsun.

İç ters açıların ölçüleri eşit olduğundan $m(\widehat{DAB}) = b$ ve $m(\widehat{EAC}) = c$ olur. $\widehat{DAE}$ doğru açı olduğundan $a + b + c = 180°$ bulunur.

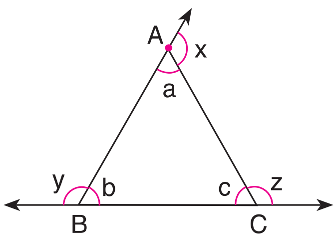
Bilgi Kutusu

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nin dış açılarının ölçüleri toplamının 360° olduğunu gösterelim.

Çözüm



Üçgenin iç açılarının ölçüleri a, b, c ve dış açılarının ölçüleri x, y, z olsun.

Üçgenin her bir köşesindeki iç açı ile dış açı doğru açı oluşturduğundan toplamları 180° olur. O hâlde

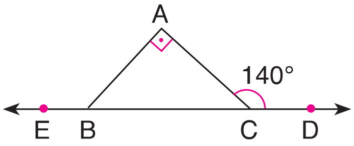
$$\begin{array}{l} a + x = 180° \\ b + y = 180° \\ \underline{+\ \ c + z = 180°} \\ \underbrace{a + b + c}_{} + x + y + z = 540° \end{array}$$

$180° + x + y + z = 540° \Rightarrow x + y + z = 360°$ bulunur.

Bilgi Kutusu

Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

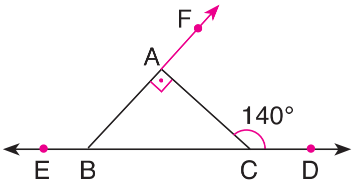
Örnek



ABC bir üçgen ve E, B, C, D noktaları doğrusaldır.

$[BA] \perp [AC]$ ve $m(\widehat{ACD}) = 140°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABE})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{BAC}$ ile $\widehat{CAF}$ bütünler açılar olup

$m(\widehat{CAF}) = 180° - 90° = 90°$ dir.

$m(\widehat{CAF}) + m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{ACD}) = 360°$

$\Rightarrow 90° + m(\widehat{ABE}) + 140° = 360°$

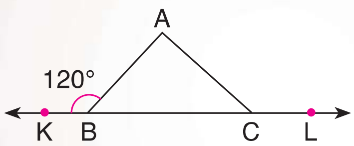
$\Rightarrow m(\widehat{ABE}) = 130°$ bulunur.

Farabi
(870-950)

Mantık, matematik, felsefe, psikoloji, politika, ahlâk, dil bilgisi, astronomi, müzik, metafizik konuları ile ilgilenmiş Türk düşünürüdür.

Matematik üzerine olan çalışmalarının çoğu düzlem geometri ve geometrik şekillerin çizimleri üzerinedir. Çizimlerinde pergel ve cetveli ustalıkla kullanmıştır.

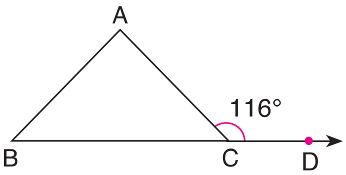
Sıra Sizde



Şekilde ABC üçgen ve K, B, C, L noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{ABK}) = 120°$ ve $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ACL}) = 200°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ kaç derecedir?

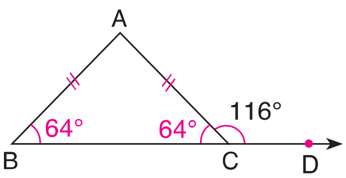
Örnek



ABC bir üçgen ve B, C, D noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{ACD}) = 116°$ ve $|AB| = |AC|$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ACB}$ ile $\widehat{ACD}$ komşu bütünler açılardır.

$m(\widehat{ACB}) = 180° - 116° = 64°$ dir.

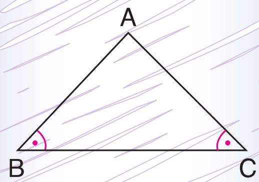
$|AB| = |AC|$ olduğundan

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 64°$ dir.

$\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$m(\widehat{BAC}) = 180° - (64° + 64°) = 180° - 128° = 52°$ bulunur.

! İki kenarının uzunluğu eşit olan üçgenlere **ikizkenar üçgen** denir.



$|AB| = |AC|$ ise

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$ olur.

Sabit bin Kurra
(834-901)

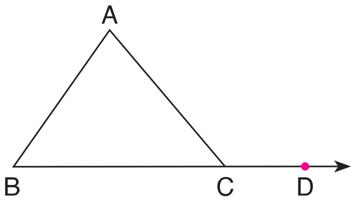
Matematikçi, doktor ve düşünür olan Kurra yüksek matematiğin yorumcusudur.

Yunan matematik kitaplarını Arapçaya çevirmiş, açıklamalar, yorumlar yaparken birçok genelleştirme yapmıştır. Pisagor teoremini herhangi bir üçgen için genelleştirmiş, bu teoremin geometrik yöntemle birkaç ispatını yapmıştır. Yunanlıların birçok buluşunu İslam dünyasına tanıtmıştır.

Ömer Hayyam
(1044-1123)

İranlı edebiyatçı ve matematikçi olan Ömer Hayyam'ın Cebir adlı kitabı matematik dünyasında uzun süre etkili olmuştur. Kübik denklemleri incelemiş, denklemleri sınıflandırmıştır. Hayyam, Pascal üçgeni olarak bilinen üçgenle ilgili de bir kitap yazmış ve Pascal'dan yıllar önce bu üçgenin özelliklerini incelemiştir. Öklid dışı geometri anlayışının temellerini atmıştır.

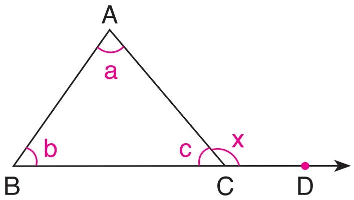
Örnek



ABC bir üçgen ve B, C, D noktaları doğrusaldır.

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC})$ olduğunu gösterelim.

Çözüm



$m(\widehat{ACD}) = x$, $m(\widehat{BAC}) = a$,

$m(\widehat{ABC}) = b$ ve $m(\widehat{ACB}) = c$ olsun.

$a + b + c = 180°$ ve $x + c = 180°$ dir.

$a + b + c = 180° \Rightarrow c = 180° - a - b$ dir.

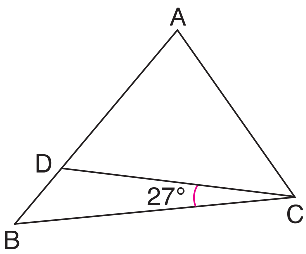
$x + c = 180° \Rightarrow x + 180° - a - b = 180° \Rightarrow x = a + b$ olur.

O hâlde $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC})$ bulunur.

Bilgi Kutusu

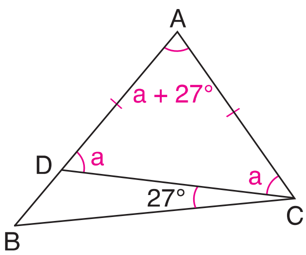
Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendine komşu olmayan iki iç açının ölçülerinin toplamına eşittir.

Örnek



ABC üçgeninde, $D \in [AB]$, $|AD| = |AC|$, $|AB| = |BC|$ ve $m(\widehat{DCB}) = 27°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$|AD| = |AC|$ olduğundan

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD}) = a$ olsun.

$|AB| = |BC| \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = a + 27°$ olur.

$\overset{\triangle}{ADC}$ üçgeninde

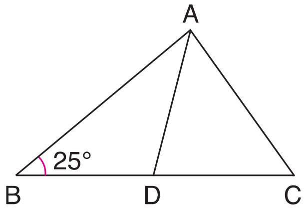
$a + a + a + 27° = 180° \Rightarrow 3a = 153°$

$\Rightarrow a = 51°$ dir.

Buradan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = a + 27° = 51° + 27° = 78°$ olur.

O hâlde $m(\widehat{ABC}) = 180° - (78° + 78°) = 24°$ bulunur.

Örnek

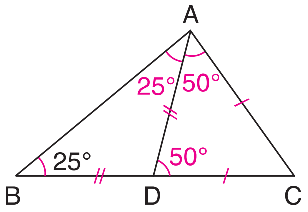


$\widehat{ABC}$ nde B, D, C noktaları doğrusal,

$|AD| = |DB|$ ve $|AC| = |CD|$ dur.

$m(\widehat{ABD}) = 25°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



$|AD| = |DB| \Rightarrow m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAD}) = 25°$ dir.

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{BAD})$

$= 25° + 25° = 50°$ dir.

$|AC| = |CD| \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{CAD}) = 50°$ olur.

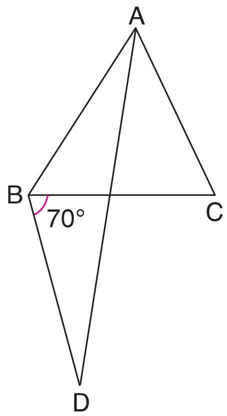
$\widehat{ADC}$ nin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

$m(\widehat{ACB}) = 180° - (50° + 50°) = 80°$ bulunur.

Battani
(858-929)

Arap gök bilimcisi ve matematikçisidir. Gök bilimle ilgili hesaplamalar yaparken trigonometri kullanmıştır. Kotanjant fonksiyonunun her dereceden tablosunu yapmış, küresel üçgenlerdeki kosinüs kuralını tanıtmıştır.

Örnek

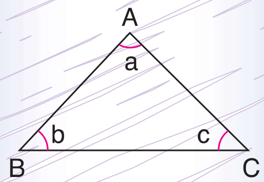


ABC eşkenar üçgen ve ABD üçgeninde

$|AB| = |BD|$ dur.

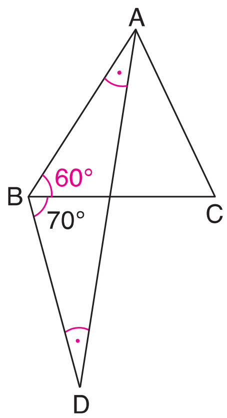
$m(\widehat{DBC}) = 70°$ olduğuna göre $m(\widehat{DAC})$ nün kaç derece olduğunu bulalım.

! Üç kenarının uzunluğu birbirine eşit olan üçgenlere **eşkenar üçgen** denir.



$a = b = c = 60°$ dir.

Çözüm



ABC eşkenar üçgen olduğu için

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 60°$ dir.

$\widehat{ABD}$ nde

$|AB| = |BD| \Rightarrow m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ADB})$

$= \dfrac{180° - (60° + 70°)}{2}$

$= 25°$ olur.

O hâlde $m(\widehat{DAC}) = 60° - 25° = 35°$ olur.

1. Tümler iki açıdan biri diğerinin 2 katından 15° eksiktir.
Bu açıların ölçülerini bulunuz.

2. Ölçüleri x, y, z olan üç açı ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

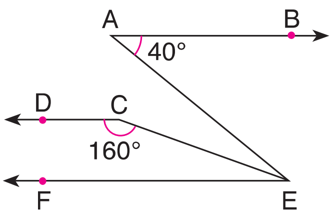
- Ölçüleri x ve y olan açılar bütünler açılardır.
- Ölçüleri y ve z olan açılar tümler açılardır.
- $x + z = 150°$ dir.

Buna göre x, y, z kaç derecedir?

3. $(x + 27°)$ dik açı olduğuna göre yandaki tabloda ölçüleri verilen açıların çeşidini ilgili kutucuklara yazınız.

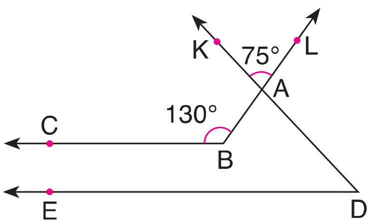
Açının ölçüsü	Açının çeşidi
$2x + 30°$	
$3x - 9°$	
$x + 10°$	

4.



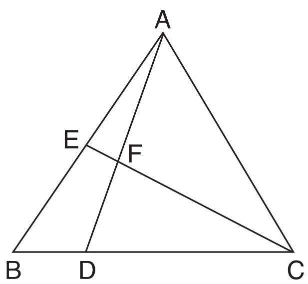
$[AB \,//\, [CD \,//\, [EF$, $m(\widehat{BAE}) = 40°$ ve $m(\widehat{DCE}) = 160°$ olduğuna göre $m(\widehat{AEC})$ kaç derecedir?

5.



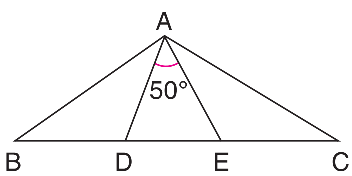
Şekilde $[BC \,//\, [DE$ ve $[BL \cap [DK = \{A\}$ dır.
$m(\widehat{KAL}) = 75°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 130°$ olduğuna göre $m(\widehat{ADE})$ kaç derecedir?

6.



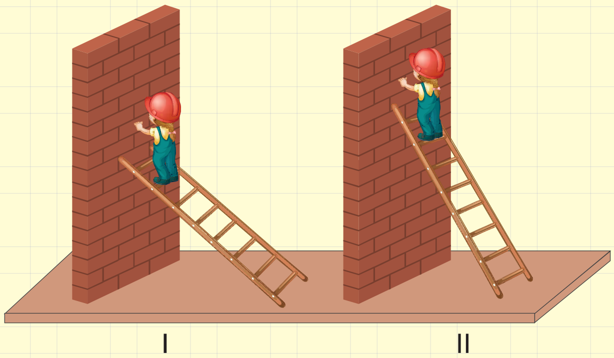
ABC üçgeninde $E \in [AB]$, $D \in [BC]$ ve $[AD] \cap [CE] = \{F\}$ dir.
$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ECB})$ ve $m(\widehat{ACB}) = 60°$ olduğuna göre $m(\widehat{AFE})$ kaç derecedir?

7.



ABC üçgen ve B, D, E, C noktaları doğrusaldır.
$|AD| = |DB|$, $|AE| = |EC|$ ve $m(\widehat{DAE}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

9.4.1.2. Üçgenin Kenar Uzunlukları ile Bu Kenarların Karşılarındaki Açıların Ölçüleri Arasındaki İlişkiler

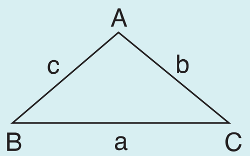


Boyacı, duvarın üst kısımlarına ulaşmak için I. konumdaki merdiveni II. konuma getiriyor. Merdiven II. konuma getirildiğinde, merdivenin duvarla arasında oluşan açının ölçüsünün I. konumdakine göre küçük olduğu; merdivenin zeminle arasında oluşan açının ölçüsünün de I. konumdakine göre büyük olduğu görülür.

» I. ve II. konumda merdivenin duvarla ve zeminle arasında oluşan açılardaki değişim; merdivenin duvara değdiği noktanın yüksekliğini ve merdivenin duvara uzaklığını nasıl etkiler?

Bilgi Kutusu

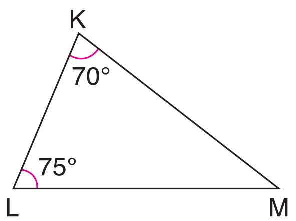
Bir üçgende ölçüleri eşit olmayan iki açıdan ölçüsü büyük olan açının karşısındaki kenarın uzunluğu, ölçüsü küçük olan açının karşısındaki kenarın uzunluğundan büyüktür.



$a > b > c$ ise

$m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BCA})$ dür.

Örnek



$\widehat{KLM}$ nde $m(\widehat{LKM}) = 70°$ ve $m(\widehat{KLM}) = 75°$ dir.

Buna göre $\widehat{KLM}$ nin kenar uzunluklarını sıralayalım.

Çözüm

$\widehat{KLM}$ nde $m(\widehat{KML}) = 180° - (70° + 75°) = 35°$ dir.

$m(\widehat{KLM}) > m(\widehat{LKM}) > m(\widehat{KML})$ olduğundan $|KM| > |LM| > |KL|$ dur.

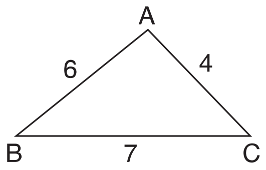
Sıra Sizde

Bir $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 83°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 41°$ dir.
Buna göre bu üçgenin kenar uzunluklarını sıralayınız.

Örnek

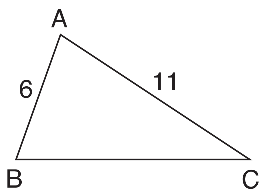
Bir $\widehat{ABC}$ nin kenar uzunlukları $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 4$ cm ve $|BC| = 7$ cm olduğuna göre bu üçgenin açı ölçülerini sıralayalım.

Çözüm



Verilen kenar uzunluklarını sıralarsak
$|BC| > |AB| > |AC|$ dur.
Buradan $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ABC})$ olur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nin iç açılarının ölçüleri arasında
$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB})$
bağıntısı vardır.
$|AB| = 6$ cm ve $|AC| = 11$ cm olduğuna göre $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB}) \Rightarrow 11 > |BC| > 6$ olur.

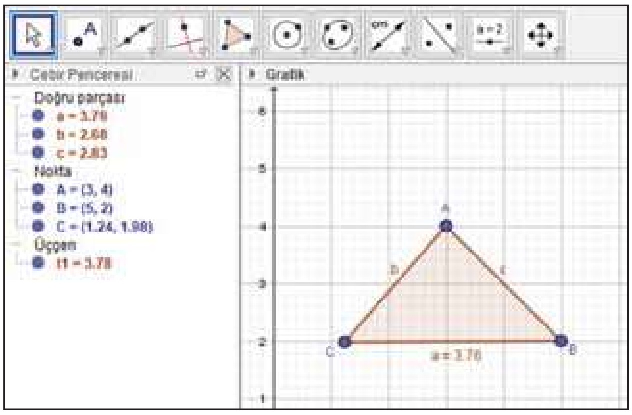
O hâlde $|BC|$ nun alabileceği tam sayı değerleri santimetre cinsinden 7, 8, 9, 10 olur.

Örnek

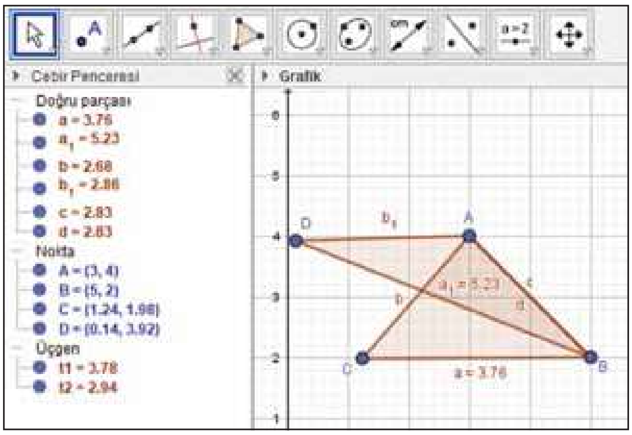
Üçgenlerin kenar ve açıları arasındaki ilişkiyi dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

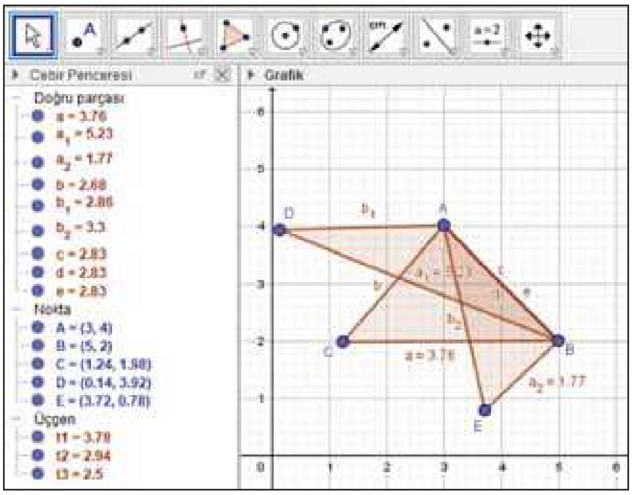
Dinamik matematik programlarından Geogebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni çizelim. Çizdiğimiz bu üçgende "Araç Çubuğu"ndaki "Uzaklık veya Uzunluk" kısmından yararlanarak BC kenarının uzunluğunu gösterelim. $|BC| = a = 3,76$ olduğunu görürüz.



Çizdiğimiz bu üçgenin A açısının ölçüsünü büyüterek ABD üçgenini oluşturalım. Daha sonra BD kenarının uzunluğunu gösterelim.
$|BD| = a_1 = 5{,}23$ olduğunu görürüz.

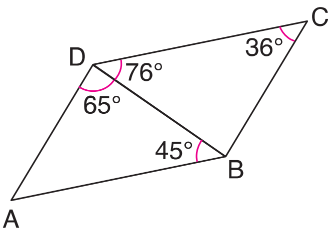


A açısının ölçüsünü ilk duruma göre küçülterek ABE üçgeninin oluşturalım. Daha sonra BE kenarının uzunluğunu gösterelim.
$|BE| = a_2 = 1{,}77$ olduğunu görürüz.



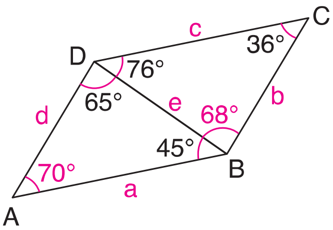
Sonuç olarak açının ölçüsü küçüldükçe karşısındaki kenarın uzunluğunun küçüldüğü, büyüdükçe karşısındaki kenarın uzunluğunun büyüdüğü görülmektedir.

Örnek



ABCD dörtgeninde [DB] köşegendir. $m(\widehat{ADB}) = 65°$, $m(\widehat{DBA}) = 45°$, $m(\widehat{BDC}) = 76°$ ve $m(\widehat{DCB}) = 36°$ olduğuna göre bu dörtgenin en uzun kenarının hangisi olduğunu bulalım.

Çözüm



$\widehat{ADB}$ ve $\widehat{DBC}$ nde verilmeyen açıların ölçülerini bulalım.

$m(\widehat{DAB}) = 180° - (65° + 45°) = 70°$ ve

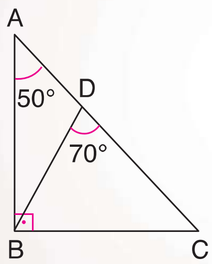
$m(\widehat{DBC}) = 180° - (76° + 36°) = 68°$ dir.

$\widehat{ADB}$ nde $m(\widehat{DAB}) > m(\widehat{ADB}) > m(\widehat{DBA}) \Rightarrow e > a > d$ dir. ... (I)

$\widehat{DBC}$ nde $m(\widehat{BDC}) > m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{DCB}) \Rightarrow b > c > e$ dir. ... (II)

I ve II den $b > c > e > a > d$ olup BC kenarı en uzun kenardır.

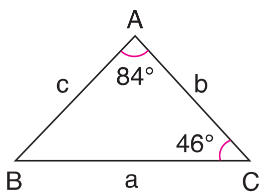
Sıra Sizde



$\widehat{ABC}$ üçgeninde $D \in [AC]$, $[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAC}) = 50°$ ve $m(\widehat{BDC}) = 70°$ dir.

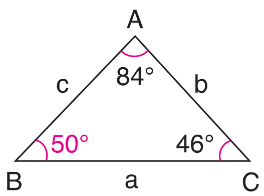
[AD], [DC], [BD] ve [BC] nın uzunluklarını sıralayınız.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{ACB}) = 46°$, $m(\widehat{BAC}) = 84°$, $|AB| = c$ cm, $|AC| = b$ cm ve $|BC| = a$ cm olduğuna göre $|b - a| - |a - c| + b$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm



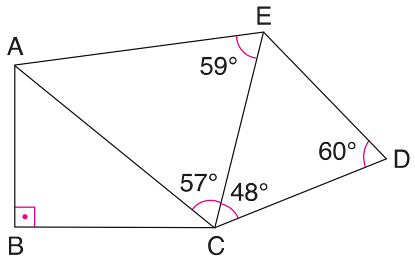
$m(\widehat{ABC}) = 180° - (46° + 84°) = 50°$ dir.

Bu durumda $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{BAC})$ olur. Dolayısıyla $c < b < a$ dır.

$b < a \Rightarrow b - a < 0$ ve $c < a \Rightarrow a - c > 0$ dır.

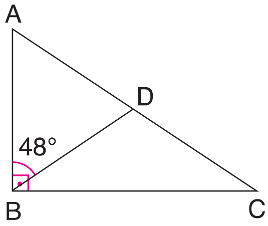
Buna göre $|b - a| - |a - c| + b = -b + a - a + c + b = c$ olur.

1.



ABCDE çokgeninde $[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{ACE}) = 57^\circ$, $m(\widehat{AEC}) = 59^\circ$, $m(\widehat{ECD}) = 48^\circ$ ve $m(\widehat{CDE}) = 60^\circ$ olduğuna göre çokgenin en uzun kenarı hangisidir?

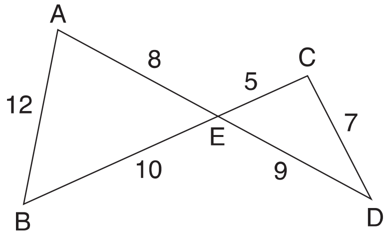
2.



$\widehat{ABC}$ nde $D \in [AC]$ ve $[AB] \perp [BC]$ dir.

$|AB| = |BD|$, $m(\widehat{ABD}) = 48^\circ$ olduğuna göre $|AB|$, $|BC|$, $|DC|$, $|AD|$ uzunluklarını sıralayınız.

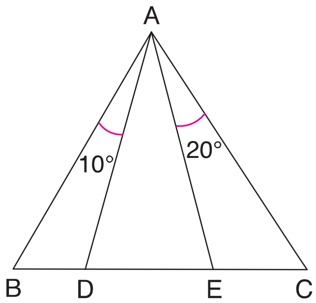
3.



Şekilde $[AD] \cap [BC] = \{E\}$ dir.

$|AB| = 12$ cm, $|AE| = 8$ cm, $|BE| = 10$ cm, $|EC| = 5$ cm, $|ED| = 9$ cm ve $|CD| = 7$ cm olduğuna göre ABE ve CDE üçgenlerinde ölçüsü en büyük olan açı hangisidir?

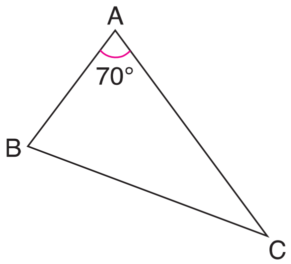
4.



ABC eşkenar üçgeninde D ve E noktaları [BC] nın üzerindedir.

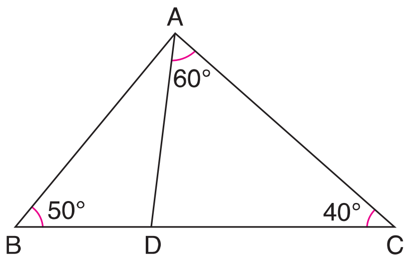
$m(\widehat{BAD}) = 10^\circ$ ve $m(\widehat{EAC}) = 20^\circ$ olduğuna göre $\widehat{ADE}$ nin kenar uzunluklarını sıralayınız.

5.



$\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$ ve $|AB| < |AC|$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ nün hangi aralıkta değer alacağını bulunuz.

6.



$\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$ dır. $m(\widehat{ABC}) = 50^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$ ve $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$ olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanları belirleyiniz.

I. $|DC| > |AD|$

II. $|BD| > |AD|$

III. $|AC| > |DC|$

IV. $|BD| > |DC|$

9.4.1.3. Uzunlukları Verilen Üç Doğru Parçasının Hangi Durumlarda Üçgen Oluşturduğunun Değerlendirilmesi

Çevresi 24 cm olan bir üçgen çiziliyor.

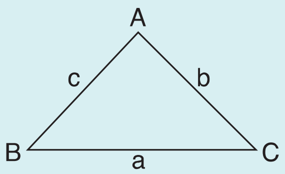
- 4 cm, 8 cm, 12 cm
- 6 cm, 8 cm, 10 cm
- 6 cm, 9 cm, 9 cm
- 5 cm, 5 cm, 14 cm

» Yukarıda uzunlukları verilen doğru parçalarından hangileri bu üçgenin kenarları olabilir?

! Farklı doğrular üzerinde bulunan üç doğru parçasının uç uca birleştirilmesi ile üçgen elde edilemeyebilir.

Bilgi Kutusu

Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyüktür. Bu eşitsizliğe **üçgen eşitsizliği** denir.



$$|b - c| < a < b + c$$
$$|a - c| < b < a + c$$
$$|a - b| < c < a + b$$

Örnek

Aşağıda uzunlukları verilen doğru parçalarının bir üçgenin kenarları olup olamayacağını bulalım.

a) 4 cm, 8 cm, 10 cm **b)** 1 cm, 3 cm, 4 cm

Çözüm

a) $8 - 4 < 10 < 8 + 4 \Rightarrow 4 < 10 < 12$

$10 - 8 < 4 < 10 + 8 \Rightarrow 2 < 4 < 18$

$10 - 4 < 8 < 10 + 4 \Rightarrow 6 < 8 < 14$ olur.

Üçgen eşitsizliğini sağladığı için bu doğru parçaları bir üçgenin kenarları olabilir.

b) $3 - 1 < 4 < 3 + 1 \Rightarrow 2 < 4 < 4$ eşitsizliği doğru bir önerme olmadığı için bu doğru parçaları bir üçgenin kenarları olamaz.

Sıra Sizde

3 cm, 4 cm, 5 cm uzunluğundaki üç çubuğu uc uca ekleyerek üçgen oluşturabilir misiniz?

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 4$ cm ve $|AC| = 9$ cm olduğuna göre $|AC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

$9 - 4 < |BC| < 9 + 4 \Rightarrow 5 < |BC| < 13$ olur.

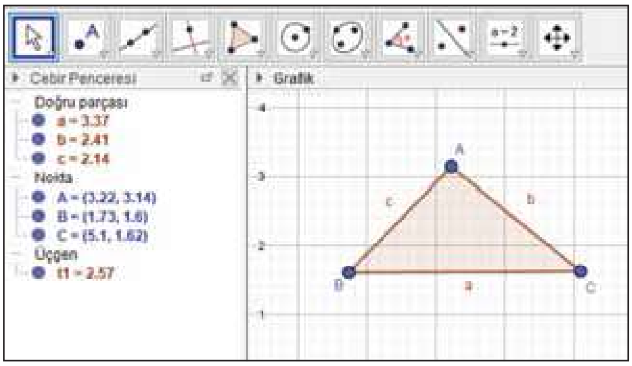
Bu durumda $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerleri 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 dir.

Örnek

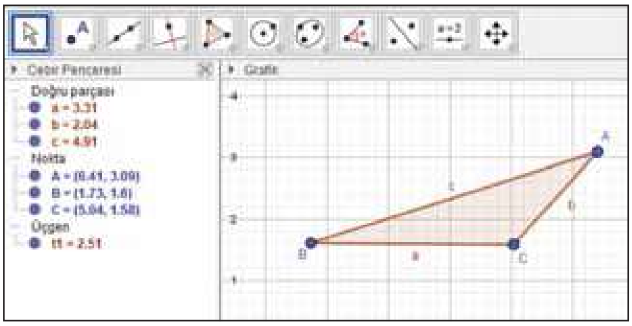
Üç doğru parçası kullanılarak hangi durumlarda üçgen oluşturulabileceğini dinamik matematik programı yardımıyla inceleyelim.

Çözüm

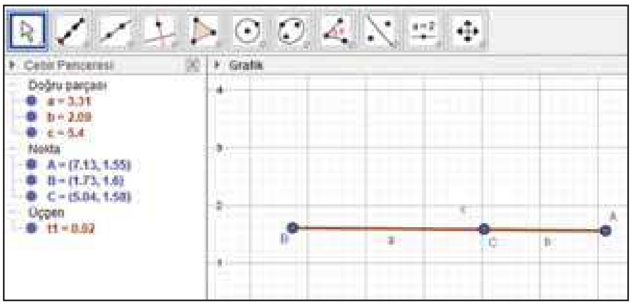
Dinamik matematik programlarından Geogebra programını kullanalım. Programın "Araç Çubuğu" bölümünden "Çokgen" kısmına tıklayalım. Ardından grafik penceresinde üç farklı noktayı birleştirerek bir ABC üçgeni oluşturalım.



"Araç Çubuğu"ndaki "Noktayı Bağla / Ayır" kısmına tıklayarak oluşturduğumuz ABC üçgeninin A köşesini oynatalım.



Aynı şekilde A köşesini B ve C noktalarıyla doğrusal olacak şekilde oynatalım. Bu durumda c = a + b olduğu ve şeklin üçgen olmadığı görülür.



Sonuç olarak bir üçgende bir kenarın uzunluğunun diğer iki kenarın uzunluklarının toplamından küçük, farklarının mutlak değerinden büyük olduğu görülmektedir.

Örnek

Bir $\widehat{ABC}$ nde $|AB| = (2x + 1)$ cm, $|AC| = (x + 4)$ cm, $|BC| = 10$ cm ve x bir tam sayı olduğuna göre $|AC|$ nun en fazla kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm

$|2x + 1 - (x + 4)| < 10 < 2x + 1 + x + 4 \Rightarrow |x - 3| < 10 < 3x + 5$

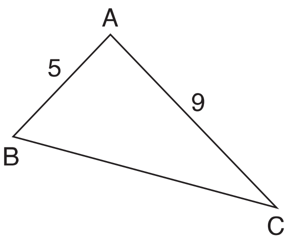
$\Rightarrow |x - 3| < 10$ ve $10 < 3x + 5 \Rightarrow -10 < x - 3 < 10$ ve $5 < 3x$

$\Rightarrow -7 < x < 13$ ve $\dfrac{5}{3} < x \Rightarrow \dfrac{5}{3} < x < 13$ olur.

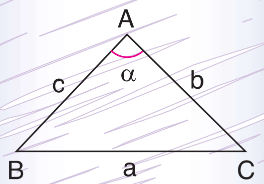
x in alabileceği en büyük değer 12 dir.

O hâlde $|AC| = x + 4 = 12 + 4 = 16$ cm bulunur.

Örnek



$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 9$ cm ve $m(\widehat{BAC}) < 90°$ olduğuna göre $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değerini bulalım.



$\alpha > 90° \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$

$\alpha < 90° \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

dir.

Çözüm

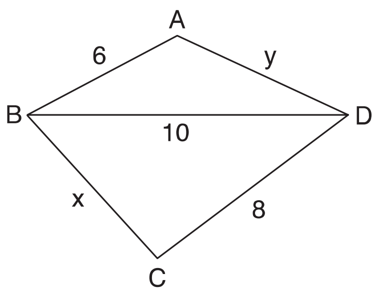
$9 - 5 < |BC| < 9 + 5$ ve $|BC|^2 < 5^2 + 9^2$

$\Rightarrow 4 < |BC| < 14$ ve $|BC|^2 < 106$

$\Rightarrow 4 < |BC| < 14$ ve $|BC| < \sqrt{106} \Rightarrow 4 < |BC| < \sqrt{106}$ dır.

Buradan $|BC|$ nun santimetre cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değeri 10 olur.

Örnek



Şekilde $m(\widehat{BAD}) > 90°$,

$|AB| = 6$ cm, $|CD| = 8$ cm,

$|BD| = 10$ cm, $|AD| = y$ cm,

$|BC| = x$ cm'dir.

ABCD dörtgeninin çevresi bir tam sayı olduğuna göre en fazla kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABD}$ nde $10 - 6 < y < 10 + 6 \Rightarrow 4 < y < 16$ dır.

$10^2 > 6^2 + y^2 \Rightarrow 100 - 36 > y^2 \Rightarrow y^2 < 64 \Rightarrow y < 8$ olur.

Buradan $4 < y < 8$ olur.

$\overset{\frown}{BCD}$ nde $10 - 8 < x < 10 + 8 \Rightarrow 2 < x < 18$ olur.

$$\begin{array}{r} 4 < y < 8 \\ + \; 2 < x < 18 \\ \hline \end{array}$$

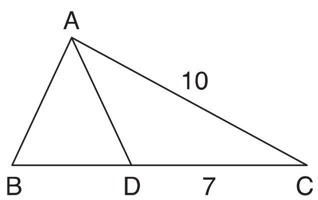
$6 < x + y < 26$ bulunur.

Dörtgenin çevresi $6 + 8 + x + y = 14 + x + y$ olduğundan

$6 + 14 < x + y + 14 < 26 + 14 \Rightarrow 20 < x + y + 14 < 40$ bulunur.

O hâlde ABCD dörtgeninin çevresi tam sayı olarak en fazla 39 cm olur.

Örnek



$\overset{\frown}{ABC}$ nde $D \in [BC]$, $|AB| = |AD|$,

$|AC| = 10$ cm ve $|DC| = 7$ cm'dir.

$|AD|$ bir tam sayı olduğuna göre $|AD|$ nun en fazla kaç santimetre olacağını bulalım.

Çözüm

$\overset{\frown}{ABD}$ ikizkenar üçgen olduğu için $\widehat{ABD}$ ve $\widehat{ADB}$ dar açılar, $\widehat{ADC}$ geniş açıdır.

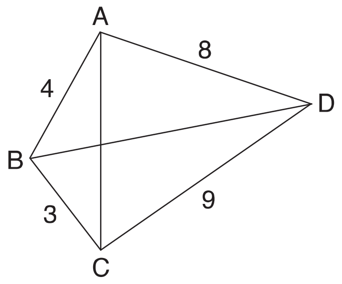
$|AB| = |AD| = x$ olsun. $m(\widehat{ADC}) > 90°$ olduğundan

$10 - 7 < x < 10 + 7$ ve $10^2 > 7^2 + x^2 \Rightarrow 3 < x < 17$ ve $51 > x^2$ olur.

Buradan $3 < x < 17$ ve $x < \sqrt{51}$ olduğundan $3 < x < \sqrt{51}$ bulunur.

O hâlde $|AD|$ tam sayı olarak en fazla 7 cm olur.

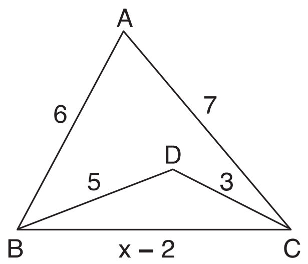
1. Bir $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC}) > 90°$, $|AC| = 4$ cm ve $|BC| = 9$ cm olduğuna göre $|AB|$ nun santimetre cinsinden alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

2. 

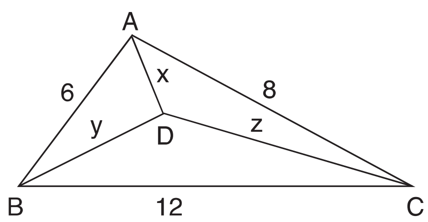
ABCD dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegendir.

$|AB| = 4$ cm, $|AD| = 8$ cm, $|BC| = 3$ cm ve $|CD| = 9$ cm olduğuna göre $|AC| + |BD|$ nun santimetre cinsinden alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

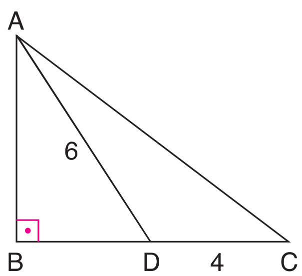
3. Çevresi 22 cm ve kenar uzunlukları birer tam sayı olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

4. 

$\widehat{ABC}$ üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 7$ cm, $|BD| = 5$ cm, $|DC| = 3$ cm, $|BC| = (x - 2)$ cm ve x tam sayı olduğuna göre $|BC|$ en fazla kaç santimetredir?

5. 

$\widehat{ABC}$ nde $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|AD| = x$ cm, $|BD| = y$ cm ve $|DC| = z$ cm olduğuna göre $x + y + z$ en az kaç santimetredir?

6. 

$\widehat{ABC}$ nde $D \in [BC]$, $[AB] \perp [BC]$, $|DC| = 4$ cm ve $|AD| = 6$ cm olduğuna göre $|AC|$ nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?