9.3.3.3. Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Bir Gerçek Sayının Mutlak Değeri

» -3, $+3$, -2, $+2$, -1, $+1$ ve 0 sayılarının başlangıç noktasına (sıfır) olan uzaklığının kaç birim olduğunu söyleyiniz.

» Bir gerçek sayının başlangıç noktasına olan uzaklığı negatif bir değer olabilir mi?

Bilgi Kutusu

Bir gerçek sayının, sayı doğrusu üzerindeki görüntüsünün başlangıç noktasına olan uzaklığına, bu gerçek sayının mutlak değeri denir. Bir x gerçek sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x \geq 0$ ise $|x| = x$ ve $x < 0$ ise $|x| = -x$ tir.

Örnek

$|-5| + 3 \cdot |-2| + |-1|$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$|-5| + 3 \cdot |-2| + |-1| = 5 + 3 \cdot 2 + 1 = 5 + 6 + 1 = 12$ bulunur.

Örnek

$x < y < z$ ise $|x - z| + |z - y| - |x - y|$ ifadesinin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

$x < y < z$ olduğundan $x - z < 0$, $z - y > 0$, $x - y < 0$ olur. Buradan

$$|x - z| + |z - y| - |x - y| = -x + z + z - y - (-x + y)$$
$$= -x + 2z - y + x - y = 2z - 2y \text{ bulunur.}$$

Örnek

$-4 < x < 5$ ise $|x - 5| + |x + 4|$ ifadesinin sonucunu bulalım.

Çözüm

$x < 5 \Rightarrow x - 5 < 0$ ve $-4 < x \Rightarrow x + 4 > 0$ olur.

Buradan $|x - 5| + |x + 4| = -x + 5 + x + 4 = 9$ bulunur.

Bilgi Kutusu

Mutlak Değerin Özellikleri

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$,
- $|x| = |-x|$,
- $|x^n| = |x|^n$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ tir.

Örnek

Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $\left|\dfrac{9\cdot(-2)}{-6}\right|$ **b)** $\left|\left(-\dfrac{12}{4}\right)^6\right|$

Çözüm

a) $\left|\dfrac{9\cdot(-2)}{-6}\right| = \dfrac{|9|\cdot|-2|}{|-6|} = \dfrac{9\cdot 2}{6} = 3$ olur.

b) $\left|\left(-\dfrac{12}{4}\right)^6\right| = \left|-\dfrac{12}{4}\right|^6 = |-3|^6 = 3^6$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını mutlak değerin özelliklerinden yararlanarak bulunuz.

a) $|7\cdot 3|$ **b)** $|-6\cdot 5|$ **c)** $|-3\cdot(-4)|$

ç) $|-5^4|$ **d)** $|3^5|$ **e)** $\left|\dfrac{100}{25}\right|$

Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Meteoroloji uzmanları, bir ülkedeki yaz ayları sıcaklık ortalamasının 30 °C olduğunu ve bu sıcaklıktan 5 °C civarında sapmalar olduğunu belirtmişlerdir.

» Bu ülkede, yaz aylarındaki en yüksek ve en düşük sıcaklık değerlerini veren tek bir denklem yazınız.

Bilgi Kutusu

$a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ için $|x| = a$ ise $x = a \vee x = -a$ tir.

Örnek

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulalım.

a) $|x| = 5$ **b)** $|x| = -3$

Çözüm

a) $|x| = 5$ ise $x = 5$ veya $x = -5$ tir. O hâlde $|x| = 5$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\{-5, 5\}$ tir.

b) $|x| = -3$ denklemini sağlayan x değeri yoktur. Çünkü hiçbir gerçek sayının başlangıç noktasına olan uzaklığı negatif olamaz. O hâlde, $|x| = -3$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Örnek

$|x - 4| = 7$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

! $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$ olur.

Çözüm

$|x - 4| = 7$ ise $x - 4 = 7$ veya $x - 4 = -7$ olur.

$x - 4 = 7 \Rightarrow x = 7 + 4 = 11$ ve $x - 4 = -7 \Rightarrow x = -7 + 4 = -3$ bulunur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $\{-3, 11\}$ olur.

Örnek

$3 \cdot |x + 1| + 6 = -3$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$3 \cdot |x + 1| + 6 = -3 \Rightarrow 3 \cdot |x + 1| = -9 \Rightarrow |x + 1| = -3$ bulunur.

Mutlak değerli bir ifade negatif bir sayıya eşit olamayacağından verilen denklemin çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Örnek

$\big|6 - |3 - 2x|\big| = 9$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\big|6 - |3 - 2x|\big| = 9 \Rightarrow 6 - |3 - 2x| = 9$ veya $6 - |3 - 2x| = -9$ olur.

$6 - |3 - 2x| = 9 \Rightarrow -3 = |3 - 2x|$ olduğundan çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

$6 - |3 - 2x| = -9 \Rightarrow |3 - 2x| = 15$

$\Rightarrow 3 - 2x = 15$ veya $3 - 2x = -15$

$\Rightarrow 2x = -12$ veya $2x = 18 \Rightarrow x = -6$ veya $x = 9$ bulunur.

Bu durumda verilen denklemin çözüm kümesi $\{-6, 9\}$ olur.

Örnek

$|a + 3| + |b - 2| + |5 - c| = 0$ olduğuna göre $a \cdot b \cdot c$ değerini bulalım.

Çözüm

$a + 3 = 0$, $b - 2 = 0$ ve $5 - c = 0$ olur. Buradan $a = -3$, $b = 2$ ve $c = 5$ bulunur. O hâlde $a \cdot b \cdot c = (-3) \cdot 2 \cdot 5 = -30$ olur.

Örnek

$|2x - 6| = x - 9$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|2x - 6| = x - 9 \Rightarrow 2x - 6 = x - 9$ veya $2x - 6 = -x + 9$

$\Rightarrow 2x - x = 6 - 9$ veya $3x = 15$

$\Rightarrow x = -3$ veya $x = 5$ bulunur.

Ayrıca mutlak değerin tanımından $x - 9 \geq 0$ ise $x \geq 9$ olur.

$x = -3$ ve $x = 5$ değerleri $x \geq 9$ şartını sağlamadığından verilen denklemin çözüm kümesi $\varnothing$ dir.

Örnek

Sayı doğrusu üzerinde $2x - 1$ ve 7 sayıları arasındaki uzaklık 10 birimdir. Buna göre x gerçek sayısının alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$2x - 1$ ile 7 sayıları arasındaki uzaklık 10 birim ise $|2x - 1 - 7| = 10$ olur.

$|2x - 8| = 10 \Rightarrow 2x - 8 = 10 \vee 2x - 8 = -10$

$\Rightarrow 2x = 18 \vee 2x = -2 \Rightarrow x = 9 \vee x = -1$ bulunur.

! x ve y gerçek sayıları arasındaki uzaklık k birim ise $|x - y| = k$ olur.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x + 8| = |x - 6|$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$|x + 8| = |x - 6| \Rightarrow x + 8 = x - 6$ veya $x + 8 = -x + 6$ olur.

$x + 8 = x - 6 \Rightarrow 14 = 0$ olduğundan buradan çözüm kümesi $\varnothing$ olur.

$x + 8 = -x + 6 \Rightarrow 2x = 6 - 8 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$ olur.

$x = -1$ değeri verilen denklemi sağladığından çözüm kümesi $\{-1\}$ olur.

Örnek

$\dfrac{18}{|x+3|+|2x+8|}$ ifadesinin alacağı en büyük değeri bulalım.

Çözüm

$\dfrac{18}{|x+3|+|2x+8|}$ ifadesinin en büyük olması için paydanın en küçük olması gerekir. $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ ve $2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4$ değerlerini verilen ifadede yerine yazalım.

$x = -3 \Rightarrow \dfrac{18}{|-3+3|+|-6+8|} = \dfrac{18}{2} = 9,$

$x = -4 \Rightarrow \dfrac{18}{|-4+3|+|-8+8|} = \dfrac{18}{1} = 18$ bulunur.

O hâlde verilen ifadenin en büyük değeri 18 bulunur.

! Mutlak değerli bir ifadenin alabileceği en küçük değer sıfırdır.

Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

pH bir sıvının asitlik-bazlık derecesini gösteren bir ölçü birimidir. Sağlıklı bir insanın kanındaki asitlik derecesinin 0,2 pH sapmasıyla ortalama 7,6 pH olduğu bilinmektedir.

» Sağlıklı bir insan kanının pH aralığını mutlak değer içeren bir eşitsizlik ile gösterebilir misiniz?

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ dır.
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$ dır.
- $a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow (a \leq x \leq b \vee -b \leq x \leq -a$ dır.

Örnek

Aşağıda verilen eşiitsizliklerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

a) $|x| < 9$ **b)** $|x| \geq 5$

Çözüm

a) $|x| < 9$ ise $-9 < x < 9$ olur. Buradan çözüm kümesi $(-9, 9)$ bulunur.

b) $|x| \geq 5$ ise $x \geq 5 \vee x \leq -5$ olur. Buradan çözüm kümesi $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$ bulunur.

Örnek

Aşağıda verilen eşitsizliklerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulalım.

a) $|x - 2| < 5$ **b)** $|x + 3| \geq 6$

Çözüm

a) $|x - 2| < 5 \Rightarrow -5 < x - 2 < 5$

$\Rightarrow -5 + 2 < x < 5 + 2 \Rightarrow -3 < x < 7$ olur.

Buradan çözüm kümesi $(-3, 7)$ bulunur.

b) $|x + 3| \geq 6 \Rightarrow x + 3 \geq 6 \vee x + 3 \leq -6 \Rightarrow x \geq 3 \vee x \leq -9$ olur.

Buradan çözüm kümesi $(-\infty, -9] \cup [3, \infty)$ bulunur.

Örnek

$1 < |x - 4| < 5$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$1 < |x - 4| < 5 \Rightarrow 1 < x - 4 < 5 \vee -5 < x - 4 < -1$

$\Rightarrow 5 < x < 9 \vee -1 < x < 3$ olur.

O hâlde çözüm kümesi $\{x | \ 5 < x < 9 \vee -1 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ olur.

Örnek

$|3x - 15| \leq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

Mutlak değerli bir ifade negatif olamaz. Bu nedenle $|3x - 15| = 0$ denkleminin çözümünü bulmalıyız.

$|3x - 15| = 0 \Rightarrow 3x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5$ olduğundan çözüm kümesi $\{5\}$ bulunur.

Örnek

$|5x - 20| > 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$5x - 20 = 0 \Rightarrow x = 4$ olur. $x = 4$ dışındaki bütün gerçek sayılar $|5x - 20| > 0$ eşitsizliğini sağlar. Bu nedenle çözüm kümesi $\mathbb{R} - \{4\}$ olur.

1. $a < 0 < b$ olmak üzere $|a - b| + |-b| + |-a|$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. $1 < x < 2$ ise $|x - 2| + |1 - x|$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. Aşağıda verilen mutlak değerli denklemlerin çözüm kümelerini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

a) $|x + 7| = |x - 3|$ **b)** $5 \cdot |x + 7| = 40$

c) $|3x - 2| = x + 3$ **ç)** $|x + 1| + 2x = 1$

d) $||3 - x| + 2| = 3$ **e)** $\left|\frac{x - 1}{x}\right| = 1$

4. Aşağıda verilen mutlak değerli eşitsizliklerin çözüm kümelerini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

a) $|2x + 1| - 5 < 13$ **b)** $|2x - 1| \geq 7$

c) $1 < |2x - 5| < 7$ **ç)** $|x - 8| > 0$

d) $|5x - 13| < 0$ **e)** $|x - 2| \geq 13$

5. Sayı doğrusu üzerinde $2x + 1$ ve 9 sayıları arasındaki uzaklık 8 birimdir. Buna göre x gerçek sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

6. $\frac{15}{|x - 3| + |x - 5|}$ ifadesinin alacağı en büyük değeri bulunuz.

7. $|2x + 1| \leq 7$ ve $2x + y = 5$ olduğuna göre y nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

9.3.3.4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

Bir üniversitenin tiyatro kulübü tarafından "Köy Okulları Tiyatro ile Buluşuyor." isimli bir yardım kampanyası düzenleniyor. Tiyatro kulübü, tiyatro gösterisi için yetişkin ve öğrenci biletlerinden toplam 90 adet satarak 1100 TL gelir elde ediyor. Elde edilen gelir ile öğrencilere kırtasiye malzemeleri alınıyor ve tiyatro kulübünce öğrencilere tiyatro oyunu sergileniyor.

» Öğrenci biletleri satış fiyatı 10 TL, yetişkin biletleri satış fiyatı 15 TL ise her bir biletten kaç adet satıldığını bulunuz.

Bilgi Kutusu

a, b, c ve d sıfırdan farklı gerçek sayılar, m ve n gerçek sayılar olmak üzere

$ax + by = m$

$cx + dy = n$

şeklinde verilen denklemlere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Örnek

$x + y = 3$

$x - y = 5$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$x - y = 5$ ise $y = x - 5$ tir. $x + y = 3$ denkleminde y yerine $x - 5$ yazarsak,

$x + y = 3 \Rightarrow x + x - 5 = 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$ bulunur.

$y = x - 5$ eşitliğinde x yerine 4 yazarsak $y = 4 - 5 = -1$ bulunur.

O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(4, -1)\}$ olur.

! Denklem sistemlerinde çözüm kümesi her iki denklemi de sağlar.

Bilgi Kutusu

Yerine Koyma Yöntemi

Denklem sistemindeki herhangi bir denklemde değişkenlerden biri eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır ve bu değişkenin değeri diğer denklemde yerine yazılır. Elde edilen 1. dereceden denklem çözülür. Bulunan değer, denklem sistemindeki denklemlerden herhangi birinde yerine yazılır ve diğer bilinmeyen bulunur.

Örnek

$2x - y = 3$

$x + 2y = 7$

denklem sisteminin çözüm kümesini yerine koyma yöntemi ile bulalım.

Çözüm

$2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3$ olur.

$x + 2y = 7$ denkleminde y yerine $2x - 3$ yazalım.

$x + 2y = 7 \Rightarrow x + 2\cdot(2x - 3) = 7 \Rightarrow x + 4x - 6 = 7$

$\Rightarrow 5x = 13 \Rightarrow x = \dfrac{13}{5}$ bulunur.

$y = 2x - 3$ eşitliğinde x yerine $\dfrac{13}{5}$ yazarsak,

$y = 2\cdot x - 3 \Rightarrow y = 2\cdot\dfrac{13}{5} - 3 \Rightarrow y = \dfrac{26}{5} - 3 = \dfrac{11}{5}$ bulunur.

O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\left\{\left(\dfrac{13}{5}, \dfrac{11}{5}\right)\right\}$ olur.

Örnek

$x + y = 5$

$x - y = 13$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ + \; x - y = 13 \end{array}\right\}$ denklemlerini taraf tarafa toplayalım.

$2x = 18 \Rightarrow x = 9$ bulunur.

$x = 9$ değerini herhangi bir denklemde yerine yazalım.

$x + y = 5 \Rightarrow 9 + y = 5 \Rightarrow y = -4$ bulunur.

O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(9, -4)\}$ olur.

Bilgi Kutusu

Yok Etme Yöntemi

Verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerden birisinin katsayıları eşit ve zıt işaretli olacak şekilde düzenlenir. Daha sonra her iki denklem taraf tarafa toplanarak bilinmeyenlerden birisi yok edilir. Elde edilen 1. dereceden denklem çözülür. Bulunan değer, denklem sistemindeki denklemlerden herhangi birinde yerine yazılır ve diğer bilinmeyen bulunur.

Örnek

$2x - 3y = 5$

$3x + 4y = -1$

denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme yöntemi ile bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} -3\cdot(2x-3y) &= 5\cdot(-3) \\ 2\cdot(3x+4y) &= -1\cdot 2 \end{aligned}\right\}$$ Birinci denklemi -3 ile ikinci denklemi 2 ile çarpalım.

$$\left.\begin{aligned} -6x+9y &= -15 \\ +\quad 6x+8y &= -2 \end{aligned}\right\}$$ Denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$17y = -17 \Rightarrow y = -1$ bulunur.

$y = -1$ değerini herhangi bir denklemde yerine yazalım.

$2x - 3y = 5 \Rightarrow 2\cdot x - 3\cdot(-1) = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ bulunur.
O hâlde verilen denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(1, -1)\}$ olur.

Sıra Sizde

$3x - 2y = 1$

$x + y = -1$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Örnek

$x - y = 2$

$-3x + 3y = -6$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} 3\cdot(x-y) &= 2\cdot 3 \\ -3x+3y &= -6 \end{aligned}\right\}$$ 1. denklemi 3 ile çarpalım.

$$\left.\begin{aligned} 3x-3y &= 6 \\ +\ -3x+3y &= -6 \end{aligned}\right\}$$ Denklemleri taraf tarafa toplayalım.

$0 = 0$ doğru önermesi elde edilir.

O hâlde denklemin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ dir.

$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$ ve $-3x + 3y = -6 \Rightarrow 3y = 3x - 6 \Rightarrow y = x - 2$ olur.

Görüldüğü gibi verilen denklem sisteminin grafikleri aynıdır. Yani bu iki doğru çakışıktır.

! Çakışık iki doğrudan oluşan bir denklem sisteminde çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

! $y = ax + b$ şeklindeki denklemlerin grafiğini çizebilmek için $x = 0$ için y değeri ve $y = 0$ için x değeri bulunur.

Örnek

$x + 3y = 6$

$y + x = 4$

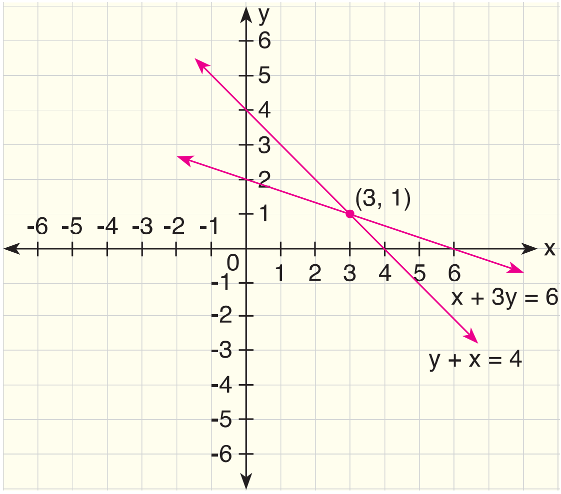
denklem sisteminin çözüm kümesini bu iki doğrunun grafiklerinden yararlanarak bulalım.

Çözüm

$x + 3y = 6$ denkleminde $x = 0$ için $y = 2$ ve $y = 0$ için $x = 6$ bulunur.
O hâlde bu doğru (0, 2) ve (6, 0) noktalarından geçer.

$y + x = 4$ denkleminde $x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 4$ bulunur.

O hâlde bu doğru (0, 4) ve (4, 0) noktalarından geçer. Bu durumda bu iki doğrunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



! İki doğrunun kesişim noktası denklem sisteminin çözümünü göstermektedir.

Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi doğruların kesiştiği (3, 1) noktası denklem sisteminin çözüm kümesidir. Bu denklem sistemi için bulduğumuz çözüm kümesi, yerine koyma ya da yok etme yöntemi ile de bulunabilir.

Örnek

$2x + 2y = 4$

$x + y = 3$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ -2\cdot(x + y) &= 3\cdot(-2) \end{aligned}\right\} \text{ 2. denklemi } -2 \text{ ile çarpalım.}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ + \; -2x - 2y &= -6 \end{aligned}\right\} \text{ Denklemleri taraf tarafa toplayalım.}$$

$0 = -2$ yanlış önermesi elde edilir.

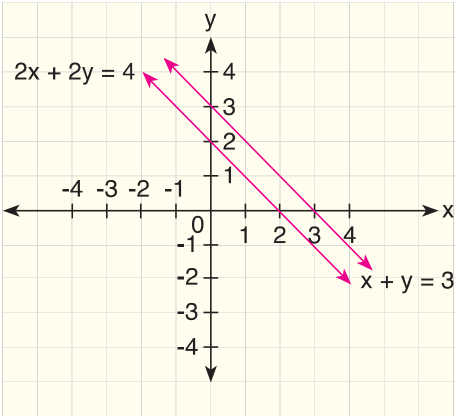
O hâlde denklemin çözüm kümesi ∅ dir.

Şimdi de denklem sisteminin çözüm kümesini bu iki doğrunun grafiklerinden yararlanarak bulalım.

2x + 2y = 4 denkleminde x = 0 için y = 2 ve y = 0 için x = 2 bulunur. O hâlde bu doğru (0, 2) ve (2, 0) noktalarından geçer.

x + y = 3 denkleminde x = 0 için y = 3 ve y = 0 için x = 3 bulunur. O hâlde bu doğru (3, 0) ve (0, 3) noktalarından geçer.

Bu durumda bu iki doğrunun grafiği aşağıdaki gibi olur.



Grafikten görüldüğü gibi doğrular birbirine paraleldir ve kesişim noktaları yoktur. Bu nedenle çözüm kümesi ∅ dir.

! Paralel iki doğrudan oluşan bir denklem sisteminde çözüm kümesi boş kümedir.

Sıra Sizde

2x + 3y = 3

4x + 6y = 4

denklem sisteminin çözüm kümesini grafik yardımıyla bulunuz.

Bilgi Kutusu

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + m = 0 \\ cx + dy + n = 0 \end{array}\right\} \text{denklem sisteminde}$$

- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$ ise doğrular çakışıktır ve çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.
- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{m}{n}$ ise doğrular paraleldir ve çözüm kümesi ∅ dir.
- $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ ise doğrular bir noktada kesişir ve çözüm kümesi bir elemanlıdır.

Örnek

$(a - 3)x + 2y - 4 = 0$

$5x + 3y - 1 = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesinin bir elemanlı olması için a nın hangi değeri alamayacağını bulalım.

Çözüm

Verilen denklem sisteminin bir elemanlı olması için $\frac{a-3}{5} \neq \frac{2}{3}$ olmalıdır.

$$\frac{a-3}{5} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cdot (a-3) \neq 2 \cdot 5 \Rightarrow 3a - 9 \neq 10$$

$$\Rightarrow 3a \neq 19$$

$$\Rightarrow a \neq \frac{19}{3} \text{ bulunur.}$$

O hâlde a değeri $\frac{19}{3}$ olamaz.

Örnek

$(a - 1)x + 2y - b + 4 = 0$

$2x - 3y + 4 = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre b – a değerini bulalım.

Çözüm

Verilen denklem sisteminin çözüm kümesinin sonsuz elemanlı olması için $\frac{a-1}{2} = \frac{2}{-3} = \frac{-b+4}{4}$ olmalıdır.

$$\frac{a-1}{2} = \frac{2}{-3} \Rightarrow -3 \cdot (a-1) = 2 \cdot 2 \Rightarrow -3a + 3 = 4$$

$$\Rightarrow -3a = 1$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{-b+4}{4} \Rightarrow 2 \cdot 4 = -3 \cdot (-b+4) \Rightarrow 8 = 3b - 12$$

$$\Rightarrow 20 = 3b$$

$$\Rightarrow b = \frac{20}{3} \text{ bulunur.}$$

Buradan $b - a = \frac{20}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{1}{3} = \frac{21}{3} = 7$ bulunur.

Örnek

$(a-1)x-2y+4=0$

$(2a+1)x+3y-5=0$

denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre a nın değerini bulalım.

Çözüm

Verilen denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme ise

$\frac{a-1}{2a+1}=\frac{-2}{3}\neq\frac{4}{-5}$ olmalıdır.

$$\frac{a-1}{2a+1}=\frac{-2}{3}\Rightarrow 3\cdot(a-1)=-2\cdot(2a+1)$$

$$\Rightarrow 3a-3=-4a-2$$

$$\Rightarrow 7a=1\Rightarrow a=\frac{1}{7} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$(m-2)x+3y-n-5=0$

$3x-4y+6=0$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre $m\cdot n$ kaçtır?

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$x<3$ $\quad$ $y>-1$

» Yukarıda verilen eşitsizlikleri koordinat sisteminde çizerek iki eşitsizliği aynı anda sağlayan ve sağlamayan noktalara örnekler veriniz.

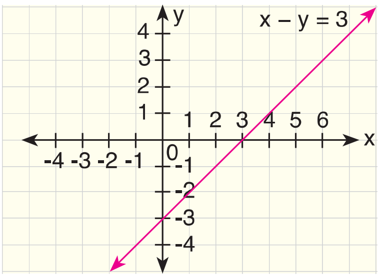
Bilgi Kutusu

a, b, c birer gerçek sayı, a ve b sıfırdan farklı olmak üzere $ax+by\leq c$, $ax+by<c$, $ax+by\geq c$, $ax+by>c$ şeklindeki ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

Örnek

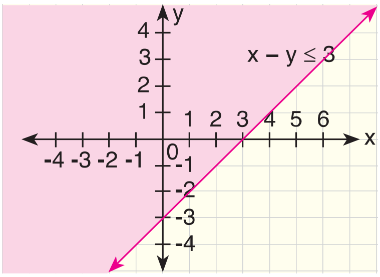
$x - y \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm



$x - y = 3$ doğrusunun grafiğini çizelim. $x = 0$ için $y = -3$ ve $y = 0$ için $x = 3$ bulunur. O hâlde bu doğru $(0, -3)$ ve $(3, 0)$ noktalarından geçer. Bu durumda bu doğrunun grafiği yandaki gibi olur.

> **!** Eşitsizlik işaretleri "≤" ya da "≥" ise doğru grafiği kesiksiz çizgi ile çizilir.



Hangi bölgenin çözüm kümesi olduğunu bulabilmek için herhangi bir nokta alıp eşitsizlikte yerine yazalım. $(0, 0)$ noktası $x - y \leq 3$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$x - y \leq 3 \Rightarrow 0 - 0 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq 3$$

doğru önermesi elde edilir. Bu nedenle $(0, 0)$ noktasının bulunduğu bölge boyanır.

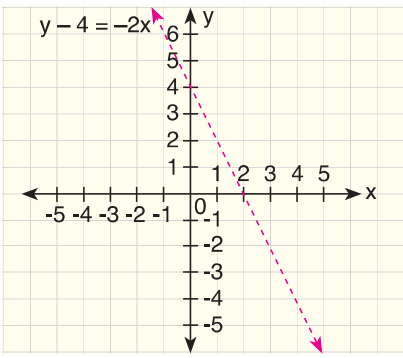
Boyalı bölgede bulunan sonsuz farklı nokta verilen eşitsizliğin çözüm kümesidir.

Örnek

$y - 4 > -2x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

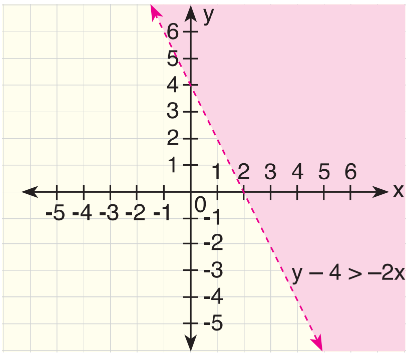
> **!** Eşitsizlik işaretleri ">" ya da "<" ise doğru grafiği kesikli çizgi ile çizilmelidir.

Çözüm



$y - 4 = -2x$ doğrusunun grafiğini çizelim. $x = 0$ için $y = 4$ ve $y = 0$ için $x = 2$ bulunur.

O hâlde bu doğru $(0, 4)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçer. Bu durumda bu doğrunun grafiği yandaki gibi olur.



(0, 0) noktası eşitsizlikte yerine yazılırsa

$y - 4 > -2x \Rightarrow 0 - 4 > -2 \cdot (0)$

$\Rightarrow -4 > 0$

yanlış önermesi elde edilir. Bu nedenle (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

Boyalı bölgede bulunan sonsuz farklı nokta verilen eşitsizliğin çözüm kümesidir.

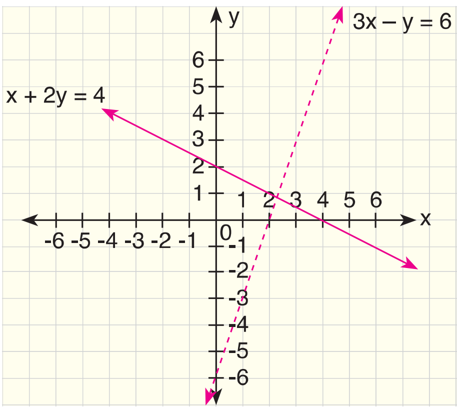
Örnek

$3x - y > 6$

$x + 2y \leq 4$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm

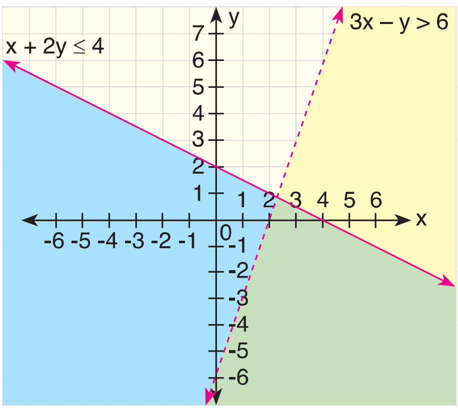


$3x - y = 6$ denklemi için $x = 0$ ise $y = -6$, $y = 0$ ise $x = 2$ olur. Grafik (0, − 6) ve (2, 0) noktalarından geçer.

$x + 2y = 4$ denklemi için $x = 0$ ise $y = 2$, $y = 0$ ise $x = 4$ olur.

Grafik (0, 2) ve (4, 0) noktalarından geçer.

Bu durumda doğruların grafikleri yandaki gibi olur.



(0, 0) noktası için,

$3x - y > 6 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 0 > 6 \Rightarrow 0 > 6$

yanlış önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

(0, 0) noktası için,

$x + 2y \leq 4 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 4$

doğru önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunduğu bölge boyanır.

Yeşil renkli bölgede bulunan sonsuz farklı nokta, verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir.

Sıra Sizde

$3 \leq x - y \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin belirttiği bölgeyi koordinat sisteminde gösteriniz.

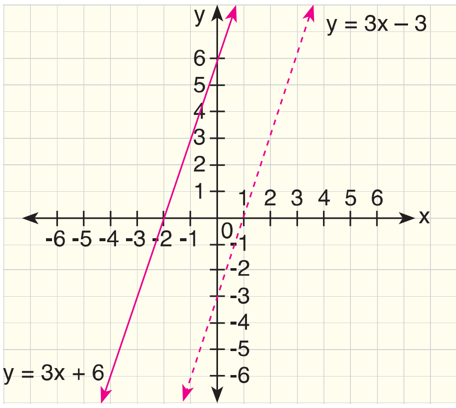
Örnek

$y \geq 3x + 6$

$y < 3x - 3$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm

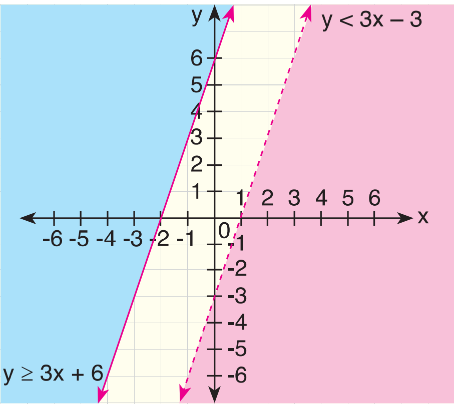


$y = 3x + 6$ denklemi için $x = 0$ ise $y = 6$, $y = 0$ ise $x = -2$ olur. Grafik (0, 6) ve (–2, 0) noktalarından geçer.

$y = 3x - 3$ denklemi için $x = 0$ ise $y = -3$, $y = 0$ ise $x = 1$ olur.

Grafik (0, –3) ve (1, 0) noktalarından geçer.

Bu durumda doğruların grafikleri yandaki gibi olur.



(0, 0) noktası için,

$y \geq 3x + 6 \Rightarrow 0 \geq 3 \cdot 0 + 6 \Rightarrow 0 \geq 6$

yanlış önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

(0, 0) noktası için

$y < 3x - 3 \Rightarrow 0 < 3 \cdot 0 - 3 \Rightarrow 0 < -3$

yanlış önermesi elde edilir. (0, 0) noktasının bulunmadığı bölge boyanır.

Görüldüğü gibi her iki bölgede boyanan ortak bölge yoktur. Bu nedenle eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.

1. Aşağıda verilen denklem sistemlerinin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\frac{x}{3} - 2y = -3$

$\frac{x}{2} + y = 22$

b) $3a - 5b = 1$

$4a - 10b = 7$

2. $ax + 3y = 15$ ve $3x + by = 4$ denklemlerinin grafiklerinin kesim noktası $(2, 1)$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?

3.

$-3x + y - 5 = 0$

$(a - 1)x + 3y + b - 1 = 0$

denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise $a + b$ kaçtır?

4. Aşağıdaki sıralı ikililerin $2x - y \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesinde olup olmadığını bulunuz.

a) $(1, 0)$ **b)** $(-2, 4)$ **c)** $(3, 1)$

ç) $(5, 3)$ **d)** $(-4, 7)$ **e)** $(0, 0)$

5. Aşağıda verilen eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini koordinat sisteminde gösteriniz.

a) $y < 3x - 1$

$x \geq 9 - 2y$

b) $x - 9 \geq -3y$

$2x + 1 > y$

c) $2x - 3y \leq 5$

$-2x + y < 2$

ç) $\frac{2}{3} > x - y$

$2y + 10 < -\frac{2x}{3}$

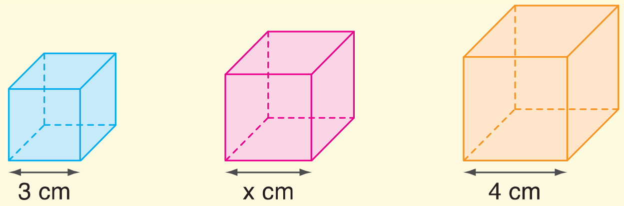
Sembol ve Gösterimler

x^n

$\sqrt[n]{x^m}$

$x^{\frac{m}{n}}$

9.3.4. ÜSLÜ İFADELER VE DENKLEMLER



- Yukarıda verilen mavi ve turuncu renkli küplerin hacimlerini bulunuz. Bulduğunuz hacimleri üslü ifade şeklinde yazabilir misiniz?
- Pembe renkli küpün yüzey alanı 78 cm^2 ise bir ayrıtının uzunluğunu bulunuz.

9.3.4.1. Üslü İfadeleri İçeren Denklemler

Üslü İfadeler ve Özellikleri

Bir kültürdeki bakteri sayısı her 1 dakikalık süre sonunda 3 katına çıkmaktadır. Bu kültürde başlangıçta 1 bakteri vardır.

» 5 dakika sonunda kültürdeki bakteri sayısı kaç olur? Üslü ifade kullanarak yazınız.

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere x^n ifadesine **üslü ifade** adı verilir. x^n ifadesinde x sayısına **taban**, n sayısına **üs** veya **kuvvet** denir.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ tane}}$$

Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) 2^4 **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ **c)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ **ç)** $(-3)^4$

Çözüm

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ olur.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ olur.

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$ olur.

ç) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ **b)** 3^5 **c)** $(-3)^5$

! $x^0 = 1 (x \in \mathbb{R} - \{0\})$

$0^n = 0 \; (n \in \mathbb{Z}^+)$

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m+n \text{ tane}} = x^{m+n} \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ tir.

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$x^n \cdot y^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ tane}} = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{n \text{ tane}} = (x \cdot y)^n \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ tir.

Örnek

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot \ldots \cdot x^m}_{n \text{ tane}} = x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ tane}}} = x^{m \cdot n} \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ tir.

John Napier
(Con Neypıır)
(1550-1617)

Üslü olarak verilen bazı ifadelerin değerlerini hesaplamada kolaylık sağlayan logaritmayı ilk kullanan kişidir.

Üzerindeki sayılarla çarpmayı ve üslü işlemleri hesaplamayı kolaylaştıran Napier'in Kemikleri adı verilen tahta çubukları bulmuştur.

! Üsleri pozitif tam sayı olan üslü ifadelerle ilgili kurallar, üsleri negatif tam sayı olan üslü ifadeler için de geçerlidir.

! $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

olur.

Örnek

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$m > n \text{ ise } \frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m-n \text{ tane}} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m-n \text{ tane}} = x^{m-n}$$

$$m = n \text{ ise } \frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^m} = 1 = x^0 = x^{m-n} \text{ olur.}$$

$$m < n \text{ ise } \frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ tane}}} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-m \text{ tane}}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n-m \text{ tane}}} = \frac{1}{x^{n-m}} = x^{m-n} \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ tir.

Örnek

$x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$\frac{x^n}{y^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ tane}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ tane}}} = \underbrace{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{y}}_{n \text{ tane}} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ tir.

Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $[(-2)^{-3}]^{-1}$ **b)** $\dfrac{2^{-3}\cdot 2^4}{8^2}$ **c)** $\dfrac{6^9}{2^2\cdot 2^7}$

Çözüm

a) $[(-2)^{-3}]^{-1} = \left[\dfrac{1}{(-2)^3}\right]^{-1} = \left(\dfrac{1}{-8}\right)^{-1} = -8$ olur.

b) $\dfrac{2^{-3}\cdot 2^4}{8^2} = \dfrac{2^{-3+4}}{(2^3)^2} = \dfrac{2^1}{2^6} = 2^{1-6} = 2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$ olur.

c) $\dfrac{6^9}{2^2\cdot 2^7} = \dfrac{6^9}{2^{2+7}} = \dfrac{6^9}{2^9} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^9 = 3^9$ olur.

Örnek

$2^x = a$ ve $3^x = b$ olduğuna göre 144^{2x} in a ve b türünden eşitini bulalım.

Çözüm

$144^{2x} = (2^4\cdot 3^2)^{2x} = (2^4)^{2x}\cdot(3^2)^{2x} = 2^{8x}\cdot 3^{4x} = (2^x)^8\cdot(3^x)^4$ olur.

$2^x = a$ ve $3^x = b$ ise $144^{2x} = (2^x)^8\cdot(3^x)^4 = a^8\cdot b^4$ bulunur.

Örnek

$12^x = 4^{x+1}$ olduğuna göre $3^x - 9^x$ ifadesinin değerini bulalım.

Çözüm

$12^x = 4^{x+1} \Rightarrow (3\cdot 4)^x = 4^{x+1} \Rightarrow 3^x\cdot 4^x = 4^x\cdot 4 \Rightarrow 3^x = 4$ olur.

$3^x - 9^x = 3^x - 3^{2x} = 3^x - (3^x)^2 = 4 - 4^2 = -12$ bulunur.

Örnek

$x = 2^{51}$, $y = 3^{68}$, $z = 7^{34}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$x = 2^{51} = (2^3)^{17} = 8^{17}$,

$y = 3^{68} = (3^4)^{17} = 81^{17}$,

$z = 7^{34} = (7^2)^{17} = 49^{17}$ olur.

$8^{17} < 49^{17} < 81^{17}$ olduğundan $x < z < y$ bulunur.

! Üslü sayıları sıralamak için tabanlarını ya da üslerini aynı yapmak kolaylık sağlar.

! Üsleri aynı olan sayılardan tabanı küçük olan sayı daha küçüktür.

! Tabanları aynı olan sayıları sıralarken taban 0 ile 1 arasında ise üssü büyük olan sayı daha küçüktür.

Örnek

$a = \left(\frac{2}{3}\right)^{26}$, $b = \left(\frac{8}{27}\right)^{11}$, $c = \left(\frac{4}{9}\right)^{14}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

Çözüm

$b = \left(\frac{8}{27}\right)^{11} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{11} = \left(\frac{2}{3}\right)^{33}$, $c = \left(\frac{4}{9}\right)^{14} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{14} = \left(\frac{2}{3}\right)^{28}$ olur.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{33} < \left(\frac{2}{3}\right)^{28} < \left(\frac{2}{3}\right)^{26} \Rightarrow \left(\frac{8}{27}\right)^{11} < \left(\frac{4}{9}\right)^{14} < \left(\frac{2}{3}\right)^{26}$ olduğundan

$b < c < a$ bulunur.

Örnek

$\frac{2^{18} + 2^{16} + 2^{12}}{4^7 + 4^6 + 4^4}$ ifadesinin değerini bulalım.

! $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n = (a + b - c) \cdot x^n$ dir.

Çözüm

$$\frac{2^{18} + 2^{16} + 2^{12}}{4^7 + 4^6 + 4^4} = \frac{2^{18} + 2^{16} + 2^{12}}{2^{14} + 2^{12} + 2^8} = \frac{2^{12}(2^6 + 2^4 + 1)}{2^8(2^6 + 2^4 + 1)}$$

$= 2^{12-8} = 2^4 = 16$ bulunur.

Örnek

$4{,}3 \cdot 10^6 + 250 \cdot 10^3 - 0{,}5 \cdot 10^5$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$4{,}3 \cdot 10^6 + 250 \cdot 10^3 - 0{,}5 \cdot 10^5 = 430 \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^4$

$= (430 + 25 - 5) \cdot 10^4 = 450 \cdot 10^4$ bulunur.

Örnek

Bir kâğıt fabrikasında üretilen 13 500 000 adet A4 kâğıdı paketlenerek satılmıştır.

Her pakette 500 adet A4 kâğıdı bulunduğuna göre kaç paket kâğıt satıldığını bulalım.

Çözüm

Paket sayısı $= \frac{13\,500\,000}{500} = \frac{135 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^2} = 27 \cdot 10^3 = 27\,000$ olur.

Örnek

Emel son 2 yıldır Türk Kızılayına nakit bağış yapmaktadır. t. yılda yaptığı bağış miktarı $180 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t$ ifadesi ile hesaplanabilmektedir.

Buna göre Emel son 2 yılda Türk Kızılayına kaç lira nakit bağış yapmıştır?

Çözüm

$t = 1 \Rightarrow 180 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1 = 180 \cdot \frac{4}{3} = 240$ TL ve

$t = 2 \Rightarrow 180 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 180 \cdot \frac{16}{9} = 320$ TL olur.

O hâlde Emel son 2 yılda $240 + 320 = 560$ TL bağış yapmıştır.

Üslü Denklemler

1 metre yükseklikten düşey olarak bırakılan bir top her seferinde bir önceki yüksekliğinin $\frac{1}{2}$ i kadar zıplıyor.

» Top kaçıncı kez zıpladığında $\frac{1}{64}$ metre yükselir?

Bilgi Kutusu

Değişkenin üs olarak yer aldığı denklemlere **üslü denklemler** denir.

Örnek

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m = x^n \Leftrightarrow m = n$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$x^m = x^n \Rightarrow \frac{x^m}{x^n} = \frac{x^n}{x^n} = x^{m-n} = 1 \Rightarrow m - n = 0 \Rightarrow m = n$ olur.

$m = n \Rightarrow m - n = 0 \Rightarrow x^{m-n} = x^0 \Rightarrow \frac{x^m}{x^n} = 1 \Rightarrow x^m = x^n$ olur.

Bilgi Kutusu

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m = x^n \Leftrightarrow m = n$ tir.

Örnek

$5^{3x-2} = 625$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$5^{3x-2} = 625 = 5^4 \Rightarrow 3x - 2 = 4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\{2\}$ olur.

Örnek

$2^x + 4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 60$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$2^x + 4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} = 60 \Rightarrow 2^x + 4 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} = 60$$

$$\Rightarrow 2^x\left(1 + 8 - \frac{3}{2}\right) = 60$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{15}{2} = 60 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\{3\}$ tür.

Örnek

$2^x = 6$ ve $3^y = 8$ olduğuna göre $2x + y$ nin değerini bulalım.

Çözüm

$2^x = 6$ ve $3^y = 8$ eşitliklerini taraf tarafa çarpalım.

$2^x \cdot 3^y = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \Rightarrow 2^x \cdot 3^y \Rightarrow 2^4 \cdot 3^1 \Rightarrow x = 4$ ve $y = 1$ olur.

Buradan $2x + y = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ bulunur.

Örnek

Bir kapta t dakika sonundaki bakteri sayısı $y = 3 \cdot 2^t$ ile hesaplanabiliyor.

Buna göre bu kaptaki bakteri sayısının kaç dakika sonra 1536 olacağını bulalım.

Çözüm

Kaptaki bakteri sayısı t dakika sonra 1536 olsun.

O hâlde $3 \cdot 2^t = 1536 \Rightarrow 2^t = 512 = 2^9 \Rightarrow t = 9$ olur.

Örnek

$(0,2)^{-3x+1} = 25^{x+3}$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(0,2)^{-3x+1} = 25^{x+3} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x+1} = 5^{2(x+3)}$$

$$\Rightarrow 5^{-(-3x+1)} = 5^{2(x+3)}$$

$$\Rightarrow 3x - 1 = 2x + 6 \Rightarrow x = 7 \text{ bulunur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\{7\}$ dir.

Bilgi Kutusu

$x, y \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere $x^n = y^n$ denkleminde

- ❖ n tek ise $x = y$ tir.
- ❖ n çift ise $|x| = |y|$ tir.

Örnek

Aşağıdaki eşitliklerde x in alacağı değerleri bulalım.

a) $x^4 = 16$ **b)** $(x+1)^{20} = 1$ **c)** $(x-2)^{11} = (-3)^{11}$

Çözüm

a) $x^4 = 16 \Rightarrow x^4 = 2^4$ ve 4 çift sayı olduğu için $|x| = 2$ olur.
O hâlde $x = -2 \vee x = 2$ bulunur.

b) $(x+1)^{20} = 1 \Rightarrow |x+1| = 1 \Rightarrow x+1 = 1 \vee x+1 = -1 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$ olur.

c) $(x-2)^{11} = (-3)^{11}$ denkleminde 11 tek sayı olduğu için
$x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1$ olur.

Örnek

$(2x-3)^4 = 256$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(2x-3)^4 = 256 = 4^4 \Rightarrow |2x-3| = 4$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 4 \vee 2x - 3 = -4$$

$$\Rightarrow 2x = 7 \vee 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ olur.

Örnek

$(n-2)^{10} = (n^2-3n)^5$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

Çözüm

$$(n-2)^{10} = (n^2-3n)^5 \Rightarrow [(n-2)^2]^5 = (n^2-3n)^5$$
$$\Rightarrow (n^2-4n+4)^5 = (n^2-3n)^5$$
$$\Rightarrow n^2-4n+4 = n^2-3n$$
$$\Rightarrow n = 4 \text{ bulunur.}$$

O hâlde verilen denklemin çözüm kümesi {4} tür.

Örnek

$(a-2)^{3a+6} = 1$ denklemini sağlayan a değerlerinin toplamını bulalım.

! $x^n = 1$ ise
- $x \neq 0$ ve $n = 0$ tir.
- $x = 1$ ve $n \in R$ dır.
- $x = -1$ ve n çift tam sayıdır.

Çözüm

- $a-2 \neq 0$ ve $3a+6 = 0 \Rightarrow a = -2$ olur.
- $a-2 = 1 \Rightarrow a = 3$ olur.
- $a-2 = -1 \Rightarrow a = 1$ olur.

$a = 1$ için $3a+6 = 3 \cdot 1 + 6 = 9$ tek sayı olduğundan $a = 1$ olamaz.

O hâlde a'nın alacağı değerlerin toplamı $-2+3 = 1$ bulunur.

Sıra Sizde

$(n-3)^{n^2-9n} = 1$ denklemini sağlayan n değerlerini bulunuz.

Örnek

$2^{x+y-5} = 5^{2x-y+2}$ olduğuna göre $x \cdot y$ nin değerini bulalım.

Çözüm

2 ve 5 aralarında asal sayılar olduğu için verilen eşitlik sadece üslerin 0 olduğu durumda doğrudur.

$$\begin{array}{r} x+y-5=0 \\ 2x-y+2=0 \\ \hline \end{array}$$

$3x-3=0 \Rightarrow x = 1$ olur. $x+y-5=0 \Rightarrow 1+y-5=0 \Rightarrow y = 4$ olur.

O hâlde $x \cdot y = 1 \cdot 4 = 4$ bulunur.

1. $\dfrac{17^0 \cdot 9^2 + 3 \cdot 3^4 + 27^2}{3^2 \cdot 13}$ işleminin sonucu kaçtır?

2. $4^{x-3} = a$ olduğuna göre 2^{2x-1} in a türünden eşitini bulunuz.

3. $2^x = a$ ve $5^x = b$ olduğuna 200^x in a ve b türünden eşitini bulunuz.

4. $\left(\dfrac{2}{25}\right)^4 : \dfrac{5^{-6}}{2} \cdot 5^{10}$ işleminin sonucu kaçtır?

5. $\dfrac{53^7 + 3 \cdot 53^6}{2 \cdot 53^6 + 106 \cdot 53^5}$ işleminin sonucu kaçtır?

6. $(a + 3)^{2a-5} = 1$ denklemini sağlayan a değerlerinin toplamı kaçtır?

7. $7^{x+2} + 2 \cdot 7^x + 7^{x+3} = 2758$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

8. $\dfrac{6^a + 6^a + 6^a}{2 \cdot 3^a + \dfrac{1}{3^{-a}}} = 32$ olduğuna göre a kaçtır?

9. $225^x = 3^{2x+4}$ olduğuna göre 5^{2x+1} ifadesinin değeri kaçtır?

10. 2^{164}, 3^{123}, 5^{82} sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

11. Bir bölgede t. aydaki aylık yağış miktarı $1930 \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^t$ mm ile ifade edilmektedir.
Buna göre tablodaki boşlukları uygun biçimde doldurunuz.

Ay	1.	2.	3.	4.
Yağış miktarı (mm)				

12. Başlangıç değeri A, artış oranı r, geçen süre t olmak üzere sabit bir yüzde ile büyüme içeren durumlar $y = A \cdot (1 + r)^t$ ile ifade edilmektedir.
Buna göre maaşı 3000 TL olan Rıza Bey'in maaşı yıllık %10 artarsa kaç yıl sonra 3630 lira olur?