Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Yaşadığımız dünyayı ve evreni doğru tanımlayabilmek için tüm sayı kümelerine ihtiyacımız vardır. Gerçek hayatta karşılaşılan birçok problemin denklem ya da eşitsizliklerle ifade edilmesi bu durumların anlaşılmasını ve yorumlanmasını kolaylaştırır. Sayıların üslü biçimde gösterimi ve bu gösterimlerin kullanılması işlemlerde kolaylık sağlar.

Sembol ve Gösterimler

$\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}'$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{Z}^+$

$\mathbb{Q}^+$

$\mathbb{R}^+$

$\mathbb{Z}^-$

$\mathbb{Q}^-$

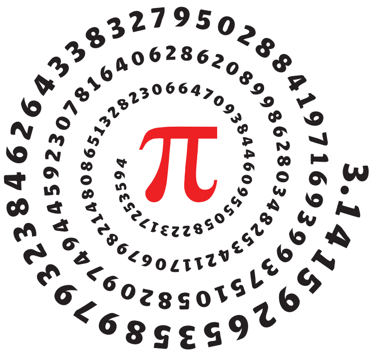
$\mathbb{R}^-$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$

9.3.1. SAYI KÜMELERİ

Pi sayısı, matematik biliminde oldukça geniş bir alanda kullanılan ve merak uyandıran bir sabit sayıdır. Pi sayısı, bir dairenin çevresinin çapına bölünmesi ile bulunur ve "π" sembolü ile gösterilir.



Pi sayısı 3,141592653589793... şeklinde devam eden bir sayıdır.

❄ π sayısını iki tam sayının oranı şeklinde yazabilir misiniz?

9.3.1.1. Sayı Kümeleri

$A = \{x \mid -8 \leq x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümesi veriliyor.

» A kümesindeki elemanlardan doğal sayı, tam sayı, negatif tam sayı ve pozitif tam sayı olanları söyleyiniz.

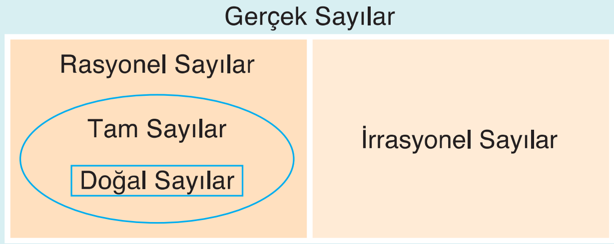
» Herhangi iki ardışık tam sayı arasındaki rasyonel sayılar sayılabilir çoklukta mıdır?

Bilgi Kutusu

- Doğal Sayılar Kümesi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Tam Sayılar Kümesi: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- Pozitif Tam Sayılar Kümesi: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- Negatif Tam Sayılar Kümesi: $\mathbb{Z}^- = \{..., -4, -3, -2, -1\}$
- Rasyonel Sayılar Kümesi: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \text{EBOB}(a,b) = 1\right\}$
- İrrasyonel Sayılar Kümesi ($\mathbb{Q}'$): $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamayan sayılar irrasyonel sayılardır.
- Gerçek Sayılar Kümesi ($\mathbb{R}$): Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi gerçek sayılar kümesidir.

Bilgi Kutusu

Tüm sayı kümeleri arasındaki ilişki aşağıdaki Venn Şeması üzerinde gösterilmiştir.



Venn Şemasından görüldüğü gibi,
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ tir.

! $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$

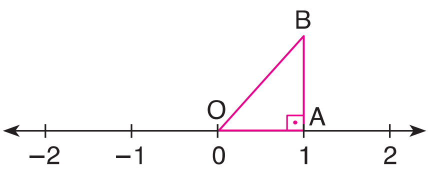
! Pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$, negatif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^-$ sembolleri ile gösterilir.

Örnek

$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini gösterelim.

Çözüm

$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusundaki yerini bulabilmek için sayı doğrusu üzerine aşağıdaki gibi eşit kenarları 1 birim olan ikiz kenar dik üçgen çizelim.



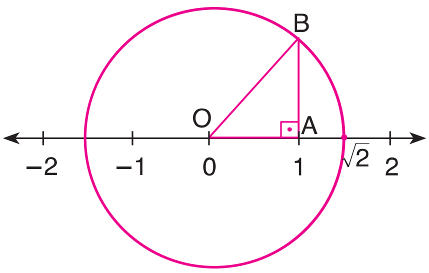
$\widehat{AOB}$ nde Pisagor teoreminden,

$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2$

$|OB|^2 = 1^2 + 1^2$

$|OB| = \sqrt{2}$ birimdir.

Pergelin ucunu O noktasına yerleştirerek aşağıdaki gibi yarıçapı [OB] olan bir çember çizelim.



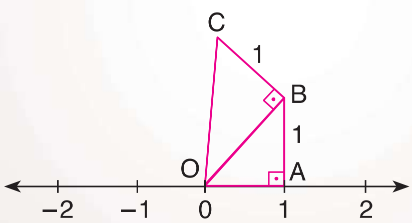
Çemberin sayı doğrusunu pozitif tarafta kestiği nokta, $\sqrt{2}$ sayının sayı doğrusundaki yeridir.

! Pozitif gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}^+$, negatif gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}^-$ sembolleri ile gösterilir.

! $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$

Sıra Sizde

Aşağıdaki sayı doğrusu üzerine çizilen üçgenlerden yararlanarak $\sqrt{3}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini bulunuz.



$|OA| \perp |AB|$

$|BC| \perp |OB|$

$|OA| = |AB| = 1$ birim

$|BC| = 1$ birim

Örnek

Aşağıda verilen sayılardan rasyonel ve irrasyonel olanları belirleyelim.

- 2, 5
- 3, 444 ...
- $\sqrt{3}$ = 1,73205080 ...
- π = 3,14159265 ...

! İrrasyonel sayıların ondalık kısımları herhangi bir tekrarlama olmaksızın sonsuza kadar devam etmektedir.

Çözüm

$2,5 = \frac{25}{10}$ ve $3,444 \ldots = 3,\overline{4} = \frac{34-3}{9} = \frac{31}{9}$ olur.

2,5 ve 3,444... sayıları iki tam sayının oranı şeklinde yazılabildiğinden rasyonel sayılardır.

$\sqrt{3}$ ve π sayıları ise iki tam sayının oranı şeklinde yazılamaz. Bu nedenle irrasyonel sayılardır.

Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri

Örnek

Aşağıda verilen işlemleri yapalım. Bulduğumuz sonuçların hangi sayı kümesine ait olduğunu söyleyelim.

a) $2 + \frac{1}{2}$ **b)** $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ **c)** $(-5) + \left(-\frac{1}{3}\right)$

Çözüm

a) $2 + \frac{1}{2} = \underset{(2)}{\frac{2}{1}} + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$ olur.

b) $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ olur.

c) $(-5) + \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\underset{(3)}{\frac{5}{1}}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-15-1}{3} = -\frac{16}{3}$ olur.

a, b ve c maddelerinde yaptığımız işlemlerin sonuçları gerçek sayılar kümesine aittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde toplama işleminin kapalılık özelliği vardır. Yani $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ dir.

Örnek

$3\sqrt{2} + (-5\sqrt{2})$ ve $(-5\sqrt{2}) + 3\sqrt{2}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$3\sqrt{2} + (-5\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ ve $(-5\sqrt{2}) + 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde toplama işleminin değişme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için a + b = b + a tir.

Örnek

$\sqrt{2} + (3\sqrt{2} + 2\sqrt{2})$ ve $(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\sqrt{2} + (3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ ve

$(\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$ için
a + (b + c) = (a + b) + c tir.

Örnek

$\frac{1}{2} + 0$ ve $0 + \frac{1}{2}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ ve $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

$\forall$a $\in \mathbb{R}$ için a + 0 = 0 + a = a olduğundan gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 0 dır.

Örnek

$\sqrt{7} + (-\sqrt{7})$ ve $(-\sqrt{7}) + \sqrt{7}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$ ve $(-\sqrt{7}) + \sqrt{7} = 0$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları 0 dır.

Bilgi Kutusu

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ dır. O hâlde a gerçek sayısının toplama işlemine göre tersi $(-a)$ sayısıdır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki eşitliklerde x, y, z, t sayılarını bulunuz.

a) $2\sqrt{2} + \sqrt{5} = x + 2\sqrt{2}$

b) $3 + \left[\sqrt{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = (3 + y) + \left(-\frac{1}{3}\right)$

c) $\frac{1}{3} + z = 0$

ç) $3\sqrt{5} + t = 3\sqrt{5}$

Gerçek Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri

Örnek

Aşağıda verilen işlemleri yapalım. Bulduğumuz sonuçların hangi sayı kümesine ait olduğunu söyleyelim.

a) $2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ **b)** $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ **c)** $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ **ç)** $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-4\sqrt{2})$

Çözüm

a) $2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ olur.

b) $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{6}$ olur.

c) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{15}$ olur.

ç) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-4\sqrt{2}) = -4$ olur.

a, b, c ve ç maddelerinde yaptığımız işlemlerin sonuçları gerçek sayılar kümesine aittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin kapalılık özelliği vardır. Yani $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için $a \cdot b \in \mathbb{R}$ dir.

Örnek

$\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5}$ ve $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{35}$ ve $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{35}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin değişme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için $a\cdot b = b\cdot a$ tir.

Örnek

$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$ ve $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{30}$ ve $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{30}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

Gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır. Yani $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$ için $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ tir.

Örnek

$1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$ ve $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ ve $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1=-\frac{1}{3}$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

Bilgi Kutusu

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

Örnek

$2\sqrt{3}\cdot 0$ ve $0\cdot 2\sqrt{3}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$2\sqrt{3}\cdot 0 = 0$ ve $0\cdot 2\sqrt{3} = 0$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları 0 dır.

Bilgi Kutusu

$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$ olduğundan gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı 0 dır.

Örnek

$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}$ ve $\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = 1$ ve $\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5} = 1$ olduğundan verilen işlemlerin sonuçları birbirine eşittir.

! Gerçek sayılar kümesinde 0 ın çarpma işlemine göre tersi yoktur.

Bilgi Kutusu

$a \neq 0$ olmak üzere $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için $a\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cdot a = 1$ tir. O hâlde a gerçek sayısının çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ sayısıdır.

Örnek

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)$ ve $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$ işlemlerini yapalım ve sonuçlarını karşılaştıralım.

Çözüm

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10} \text{ ve } \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{10}+\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

olduğundan $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$ olur.

Sıra Sizde

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$ ve $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ işlemlerini yapıp sonuçlarını karşılaştırınız.

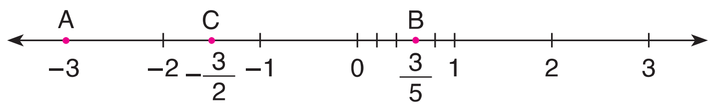
Bilgi Kutusu

$\forall$a, b, c $\in \mathbb{R}$ için $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$ ve $(b + c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ olduğundan gerçek sayılar kümesi üzerinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek

A(−3), B$\left(\frac{3}{5}\right)$ ve C$\left(-\frac{3}{2}\right)$ sayılarını sayı doğrusunda gösterelim.

Çözüm



! Gerçek sayılar kümesi sayı doğrusunu tam olarak doldurur.

Bilgi Kutusu

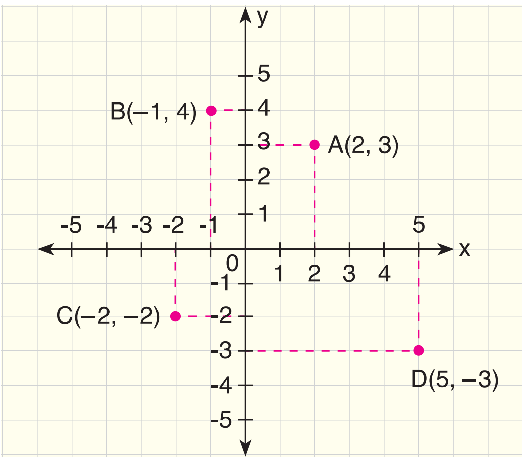
Gerçek sayılar, sayı doğrusunda gösterildiğinde sayı doğrusundaki her bir nokta tek bir gerçek sayıyı temsil eder ve gerçek sayılar kümesinin her elemanına sayı doğrusunda tek bir nokta karşılık gelir. Yani sayı doğrusu gerçek sayılar kümesinin geometrik temsilidir.

Örnek

A(2, 3), B(−1, 4), C(−2, −2) ve D(5, −3) noktalarını koordinat sisteminde gösterelim.

! İki sayı doğrusunun 0 (sıfır) noktasında dik kesişmesi ile koordinat sistemi elde edilir.

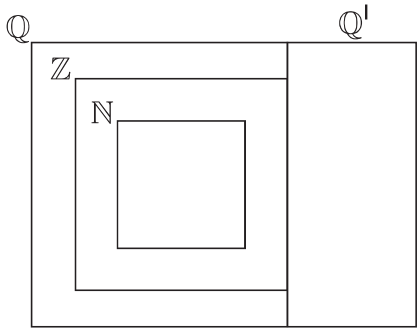
Çözüm



Bilgi Kutusu

x, y ∈ ℝ olmak üzere koordinat sistemindeki her bir nokta (x, y) sıralı ikilisini temsil eder ve her (x, y) sıralı ikilisi koordinat sisteminde bir noktaya karşılık gelir. Yani koordinat sistemi ℝ x ℝ nin geometrik temsilidir.

1. $\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi,
$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi,
$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi,
$\mathbb{Q}'$: İrrasyonel sayılar kümesi
olmak üzere aşağıda verilen sayıları yandaki kümelerin içine yerleştiriniz.



• $\sqrt{3}$	• 4,333...	• $\frac{1}{7}$	• 4,35792134...	• -1	• $-\sqrt{13}$	• π
• $-\frac{1}{3}$	• $\sqrt{36}$	• 2,9	• $2,6\overline{7}$	• 4	• -23	• 0

2. I. $\frac{1}{3}$ sayısının gerçek sayılar kümesinde çarpma işlemine göre tersi 3 tür.
II. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ tir.
III. Gerçek sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 1 dir.
IV. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ tir.
V. Gerçek sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı 0 dır.
Yukarıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

3. $\sqrt{5}$ sayısını sayı doğrusunda gösteriniz.

4. Aşağıdaki sayıların çarpma işlemine göre tersini noktalı yerlere yazınız.

• $-\frac{7}{3} \rightarrow$	• $\frac{11}{7} \rightarrow$	• $3 \rightarrow$ ....
• $0,7 \rightarrow$	• $\sqrt{5} \rightarrow$	• $1,\overline{3} \rightarrow$ ....

5. x ve y birer tam sayı olmak üzere $(x-2)\cdot\sqrt{3} + (y+4)\cdot\sqrt{7}$ işleminin sonucu bir rasyonel sayıdır.
Buna göre x + y ifadesinin değerini bulunuz.

6. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ sembolleri ile gösterilen her bir sayı kümesi için birer eleman yazınız.

9.3.2. BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Bir sepet fındığımız vardır. Bu fındıkları her biri 2 fındıktan oluşan gruplara bölünce 1 fındık artıyor. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10 fındıktan oluşan gruplara bölünce de sırasıyla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 fındık artıyor.

❉ Bu sepette en az kaç fındık vardır?

Sembol ve Gösterimler

EKOK
EBOB

9.3.2.1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları

» Öyle bir sayı söyleyin ki 2, 3, 4, 5, 9 ve 10 ile kalansız bölünebilsin?

!

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} - \quad & C \\ \cline{1-1} K & \end{array}$$

Yukarıdaki bölme işleminde

$A \rightarrow$ bölünen

$B \rightarrow$ bölen

$C \rightarrow$ bölüm

$K \rightarrow$ kalan

dır.

Örnek

$$\begin{array}{r|l} x & 44 \\ \cline{2-2} - \quad & 7 \\ \cline{1-1} y^2 & \end{array}$$

Yandaki bölme işleminde x ve y birer pozitif tam sayı olduğuna göre x yerine gelebilecek en büyük sayıyı bulalım.

Çözüm

$x = 44 \cdot 7 + y^2$ ve $0 \leq y^2 < 44$ tür. x in en büyük olması için y yi en büyük seçmeliyiz. $0 \leq y^2 < 44$ eşitsizliğini sağlayan en büyük y değeri 6 dır.

$x = 44 \cdot 7 + y^2 \Rightarrow x = 44 \cdot 7 + 6^2 \Rightarrow x = 308 + 36 \Rightarrow x = 344$ bulunur.

Bilgi Kutusu

2 ile Bölünebilme

❖ Birler basamağı çift olan tam sayılar 2 ile kalansız bölünür.

❖ Tek sayıların 2 ile bölümünden kalan 1 dir.

!

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} - \quad & C \\ \cline{1-1} K & \end{array}$$

A, B, C, K birer tam sayı ve $B \neq 0$ olmak üzere $A = B \cdot C + K$ ve $0 \leq K < B$ dir. $K = 0$ ise A sayısı B sayısına kalansız bölünür.

Örnek

173a sayısının 2 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm

173a sayısının 2 ile kalansız bölünmesi için a sayısı 0, 2, 4, 6, 8 olmalıdır.

O hâlde a nın alabileceği değerlerin toplamı $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ olur.

Bilgi Kutusu

3 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının rakamları toplamı 3 ün katı ise bu sayı 3 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 3 ile bölümünden kalan, bu sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Beş basamaklı 7a321 sayısının 3 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

7a321 sayısının 3 ile kalansız bölünmesi için rakamları toplamının 3 ün katı olması gerekir. Bu durumda $7 + a + 3 + 2 + 1 = 13 + a$ toplamının 3 ün katı olması için a nın alabileceği değerler 2, 5, 8 olmalıdır.

Örnek

On beş basamaklı 222...2 sayısının 3 ile bölümünden kalanı bulalım.

Çözüm

On beş basamaklı 222...2 sayısının rakamları toplamı

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{15 \text{ tane}} = 15 \cdot 2 = 30 \text{ olur.}$$

30 un 3 ile bölümünden kalan 0 dır. Bu nedenle on beş basamaklı 222.....2 sayısının 3 ile bölümünden kalan 0 olur.

Sıra Sizde

Beş basamaklı 29a8b sayısı 3 ile kalansız bölünüyor.

a + b nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Bilgi Kutusu

4 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının son iki basamağını oluşturan sayı 4 ün katı ise bu sayı 4 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 4 ile bölümünden kalan, bu sayının son iki basamağındaki sayının 4 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 79a4 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

79a4 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi için sayının son iki basamağını oluşturan a4 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi gerekir. O hâlde a nın alabileceği değerler 0, 2, 4, 6 ve 8 dir.

Örnek

Beş basamaklı 2753a sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 ise a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

2753a sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 ise 3a sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 tür. O hâlde a nın alabileceği değerler 1, 5 ve 9 olur.

Sıra Sizde

Rakamları farklı dört basamaklı 97a6 sayısının 4 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

Bilgi Kutusu

5 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının birler basamağındaki rakam 0 ya da 5 ise bu sayı 5 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 5 ile bölümünden kalan, bu sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 2a6b sayısı 5 ve 3 ile kalansız bölünüyor. Buna göre a nın alabileceği değerlerin toplamını bulalım.

Çözüm

2a6b sayısı 5 ile kalansız bölünüyorsa b sayısı 0 ya da 5 tir.

b = 0 için 2a60 sayısı 3 ile kalansız bölünüyorsa 2 + a + 6 + 0 = 8 + a toplamı 3 ün katıdır. Buradan a sayısı 1, 4 ve 7 olur.

b = 5 için 2a65 sayısı 3 ile kalansız bölünüyorsa 2 + a + 6 + 5 = 13 + a toplamı 3 ün katıdır. Buradan a sayısı 2, 5 ve 8 olur.

a nın alabileceği değerlerin toplamı 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27 olur.

ÇOK BÖLÜNEN SAYI

0'dan 9'a kadar olan bütün rakamların yalnız birer kez kullanıldığı 10 rakamlı bir sayı, 1'den 10'a kadar tam olarak bölünüyor.

Bu koşulu sağlayan en küçük sayıyı bulunuz.

Sıra Sizde

Beş basamaklı 9763a sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 ise a nın alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?

Bilgi Kutusu

8 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının son üç basamağının oluşturduğu sayı 8 in katı ise bu sayı 8 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 8 ile bölümünden kalan, bu sayının son üç basamağındaki sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

Beş basamaklı 1920a sayısının 8 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

1920a sayısının 8 ile kalansız bölünmesi için 20a sayısının 8 ile kalansız bölünmesi gerekir. O hâlde a sayısı 0 veya 8 olmalıdır.

Sıra Sizde

Rakamları birbirinden farklı beş basamaklı 328a6 sayısı 8 ile kalansız bölündüğüne göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Bilgi Kutusu

9 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının rakamları toplamı 9 un katı ise bu sayı 9 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 9 ile bölümünde kalan, bu sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

Örnek

2aa6 sayısının 9 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

2aa6 sayısının 9 ile kalansız bölünmesi için $2 + a + a + 6 = 8 + 2a$ toplamının 9 un katı olması gerekir. O hâlde $a = 5$ olmalıdır.

Örnek

Dört basamaklı 436a sayısının 9 ile bölümünden kalan 5 ise a nın alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

436a sayısının 9 ile bölümünden kalan 5 ise
$4 + 3 + 6 + a = 13 + a = 9k + 5$, $k \in \mathbb{N}$ dir.
$13 + a = 9k + 5$ ise $8 + a = 9k$ olur. O hâlde a nın alabileceği değer 1 olur.

Sıra Sizde

$\underbrace{232323 \ldots 23}_{30 \text{ basamaklı}}$ sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Bilgi Kutusu

10 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının birler basamağındaki rakam 0 ise bu sayı 10 ile kalansız bölünür.
- Bir tam sayının 10 ile bölümünden kalan, bu sayının birler basamağındaki rakama eşittir.

Örnek

Dört basamaklı 9a8b sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 dir.
Bu sayı 9 ile kalansız bölündüğüne göre a + b nin alacağı değeri bulalım.

Çözüm

9a8b sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 ise $b = 7$ olur. 9a87 sayısı 9 ile kalansız bölündüğünden $9 + a + 8 + 7 = 24 + a$ toplamı 9 un katı olduğundan $a = 3$ olur. Bu durumda $a + b = 3 + 7 = 10$ bulunur.

Bilgi Kutusu

11 ile Bölünebilme

- Bir tam sayının basamaklarında bulunan rakamların birler basamağından başlayarak ve birer basamak atlayarak sayı değerleri toplanır.
- Atlanan basamaklardaki rakamların sayı değerleri toplanır.
- 1. bulunan toplamdan 2. bulunan toplam çıkarılır. Elde edilen fark 11 in katı ise sayı 11 ile kalansız bölünür.

Örnek

1235742013 sayısının 11 ile kalansız bölünüp bölünmediğini bulalım.

Çözüm

1235742013 sayısı için,

(3 + 0 + 4 + 5 + 2) – (1 + 2 + 7 + 3 + 1) = 14 – 14 = 0 bulunur.

Bulduğumuz fark 11 in katı olduğu için verilen sayı 11 ile kalansız bölünür.

Örnek

Beş basamaklı 4a821 sayısının 11 ile kalansız bölünmesi için a nın alabileceği değeri bulalım.

Çözüm

4a821 sayısının 11 ile kalansız bölünmesi için

(1 + 8 + 4) – (a + 2) = 11 – a farkı 11 in katı olmalıdır. O hâlde a = 0 olur.

Sıra Sizde

1m630 sayısı 11 ile kalansız bölündüğüne göre m kaçtır?

! 1 sayısından başka ortak pozitif tam sayı böleni olmayan iki pozitif tam sayıya aralarında asal sayılar denir.

Bilgi Kutusu

a ile b aralarında asal sayılar olmak üzere a ve b sayılarına kalansız bölünebilen bir tam sayı a·b ye de kalansız bölünür.

! Ardışık pozitif tam sayılar aralarında asaldır.

! 1 ile tüm pozitif tam sayılar aralarında asaldır.

Örnek

Beş basamaklı 16a3b sayısı 6 ile kalansız bölünüyor.

Buna göre a + b nin alabileceği en büyük değeri bulalım.

Çözüm

6 = 2.3 olduğundan 6 ile kalansız bölünen bir sayı hem 2 hem de 3 ile kalansız bölünür. 16a3b sayısı 2 ile kalansız bölünüyor ise b nin alacağı değer 0, 2, 4, 6 ya da 8 dir.

a + b nin en büyük değerini bulabilmek için b = 8 alalım.

16a38 sayısı 3 ile kalansız bölündüğüne göre 1 + 6 + a + 3 + 8 = 18 + a toplamı 3 ün katı olmalıdır. Buradan a nın değeri 0, 3 , 6 , 9 bulunur.

a + b nin en büyük değeri b = 8 ve a = 9 için a + b = 9 + 8 = 17 olur.

Örnek

Beş basamaklı 93a3b sayısı 36 ile kalansız bölünüyor.

Buna göre a + b nin alabileceği değerleri bulalım.

Çözüm

$36 = 9 \cdot 4$ olduğundan 36 ile kalansız bölünen bir sayı hem 9 hem de 4 ile kalansız bölünür. 93a3b sayısı 4 ile kalansız bölündüğüne göre b nin değeri 2 ya da 6 dır.

b = 2 ise 93a32 sayısı 9 ile kalansız bölündüğünden $9 + 3 + a + 3 + 2 = 17 + a$ toplamı 9 un katı olur.

Buradan a = 1 olup a + b = 1 + 2 = 3 olur.

b = 6 ise 93a36 sayısı 9 ile kalansız bölündüğüne göre $9 + 3 + a + 3 + 6 = 21 + a$ toplamı 9 un katı olur. Buradan a = 6 olup a + b = 6 + 6 = 12 olur. a + b nin alabileceği değerler 3 ve 12 dir.

Örnek

Beş basamaklı 4a93b sayısının 15 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre (a, b) ikilisinin kaç farklı değer alacağını bulalım.

Çözüm

Bir sayının 15 ile bölümünden kalan 2 ise $15 = 3 \cdot 5$ olduğundan bu sayının 5 ve 3 ile bölümünden kalan 2 dir.

4a93b sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 ise b nin değeri 2 ya da 7 dir.

b = 2 ise 4a932 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan $4 + a + 9 + 3 + 2 = 18 + a = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ olur. O hâlde $16 + a = 3k$ olup a nın alacağı değer 2, 5 ya da 8 dir.

b = 7 ise 4a937 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan $4 + a + 9 + 3 + 7 = 23 + a = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ olur. O hâlde $21 + a = 3k$ olup a nın alacağı değer 0, 3, 6 ya da 9 dur.

Buna göre (a , b) ikilisinin (2 , 2), (5, 2), (8, 2), (0, 7), (3, 7), (6, 7) ve (9, 7) olacak şekilde 7 farklı değeri vardır.

Sıra Sizde

Dört basamaklı 2a7b sayısı 45 ile kalansız bölünüyor.

Buna göre a yerine kaç farklı sayı gelebilir?

1. $$\begin{array}{l|l} a & b^2 \\ \cline{2-2} - & 6 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Yandaki bölme işleminde a ve b birer pozitif tam sayı olduğuna göre a nın en küçük değeri kaçtır?

2. $$\begin{array}{l|l} A & B+1 \\ \cline{2-2} - & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} B & C-1 \\ \cline{2-2} - & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Yandaki bölme işlemlerine göre A nın C türünden değerini bulunuz.

3. 25ab dört basamaklı sayısı, 9 ile kalansız bölünüyor.
Bu sayının 5 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

4. Beş basamaklı 3a25b sayısı 12 ile bölündüğüne göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

5. Aşağıdaki tabloda I. sütunda verilen ifadelerin doğru olabilmesi için a nın alabileceği değerler II. sütunda karışık olarak verilmiştir. Doğru eşleştirmeleri yapınız.

I.
2a51 sayısı 3 ile kalansız bölünmektedir.
43a8 sayısı 11 ile kalansız bölünmektedir.
15a2 sayısı 4 ile kalansız bölünmektedir.
543a sayısı 6 ile kalansız bölünmektedir.
457a sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 tür.

II.
{1, 3, 5, 7, 9}
{1, 4, 7}
{6}
{7}
{4, 9}
{0, 6}

6. Dört basamaklı 3a8b sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 ve 3 ile bölümünden kalan 2 ise (a, b) ikililerinin kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

7. Dört basamaklı 2a7b sayısı 18 ile bölündüğüne göre a nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

8. Alptuğ, marketten birim fiyatı 11 TL olan bir üründen belli miktarda almıştır. Alptuğ yaptığı alışveriş için toplam 5a2 TL ödemiştir.
Alptuğ bu üründen toplam kaç adet satın almıştır?

9. Dört basamaklı 8m7n sayısının 30 ile bölümünden kalan 17 olduğuna göre m + n nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

10. Beş basamaklı 922ab sayısının 15 ile bölümünden kalan 8 olduğuna göre (a, b) ikilisinin kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

9.3.2.2. Tam Sayılarda EBOB ve EKOK

Bir şirkette iki farklı kilidi olan bir kasa bulunmaktadır. Kasanın şifreleri şirketin iki farklı çalışanındadır. Bir araya gelmeden kasayı açmaları mümkün değildir. Bu kişiler farklı ülkelere belirli aralıklarla iş seyahatine çıkıyorlar. Birisi 6 günde bir, diğeri 8 günde bir şirkete gelip tekrar ayrılıyorlar.

» Kasayı kaçar gün aralıklarla açabilirler?

Bilgi Kutusu

- En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne **bu sayıların en büyük ortak böleni** denir. a ve b sayılarının en büyük ortak böleni EBOB(a, b) biçiminde gösterilir.
- En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne **bu sayıların en küçük ortak katı** denir. a ve b sayılarının en küçük ortak katı EKOK(a, b) biçiminde gösterilir.

Örnek

24, 32 ve 48 sayılarının en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını asal çarpanlar algoritması yardımı ile bulalım.

Çözüm

24	32	48	2
12	16	24	2
6	8	12	2
3	4	6	2
3	2	3	2
3	1	3	3
1		1	

24, 32 ve 48 sayılarının en büyük ortak böleni EBOB (24, 32, 48) = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ bulunur.

24, 32 ve 48 sayılarının en küçük ortak katı EKOK(24, 32, 48) = $2^5 \cdot 3 = 96$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki istenilen değerleri bulunuz.

a) EBOB(5, 15, 30)
b) EKOK(13, 17)
c) EBOB(8, 9)
ç) EKOK(25, 50, 75)
d) EBOB(40, 80, 120)
e) EKOK(10, 11)

! a ve b aralarında asal iki pozitif tam sayı ise
EBOB(a, b) = 1
EKOK(a, b) = $a \cdot b$ olur.

Örnek

Tatil için ülkemize gelen 12 Alman, 24 Japon, 36 İngiliz turist bir otele yerleştirilecektir.

Her odada eşit sayıda ve aynı ülkeden turist kalması şartıyla en az kaç oda gerekeceğini bulalım.

Çözüm

Oda sayısının en az olması için her odada mümkün olduğu kadar fazla sayıda kişinin kalması gerekir. O hâlde 12, 24, 36 sayılarının en büyük ortak bölenini bulalım.

$$
\begin{array}{ccc|c}
12 & 24 & 36 & 2 \\
6 & 12 & 18 & 2 \\
3 & 6 & 9 & 2 \\
3 & 3 & 9 & 3 \\
1 & 1 & 3 & 3 \\
 & & 1 &
\end{array}
$$

EBOB(12, 24, 36) = $2^2 \cdot 3 = 12$ olur. Yani bir odada en fazla 12 kişi kalmalıdır.

Bu durumda oda sayısı $\dfrac{12 + 24 + 36}{12} = 6$ olur.

Örnek

Üç zil 20, 30, 60 dakikalık aralıklarla çalıyor. Saat 08.30 da bu üç zil birlikte çalıyor.

Buna göre tekrar birlikte çaldıklarında saatin kaç olacağını bulalım.

Çözüm

20, 30 ve 60 ın en küçük ortak katı, üç zilin kaç dakikada bir birlikte çaldıklarını verir. Birbirlerinin katları olan tam sayıların EKOK u bu sayılardan büyük olana eşit olduğundan EKOK(20, 30, 60) = 60 olur.

Bu durumda saat 08.30 da bu üç zil çaldıktan 60 dakika sonra 09.30 da tekrar birlikte çalacaklardır.

! Birbirlerinin katları olan tam sayıların EBOB u bu sayılardan küçük olana, EKOK u ise büyük olana eşittir.

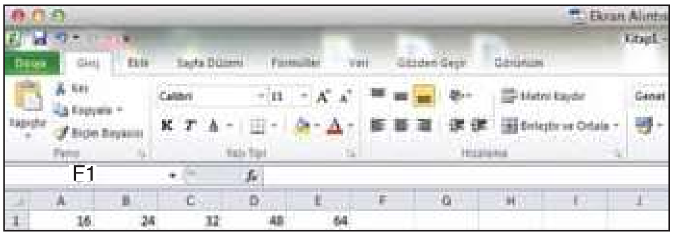
Örnek

Bir mağazada çalışan Taner Bey 16 m, 24 m, 32 m, 48 m ve 64 m uzunluğundaki beş parça kumaşı eşit büyüklükte en büyük parçalara ayırmak istiyor.

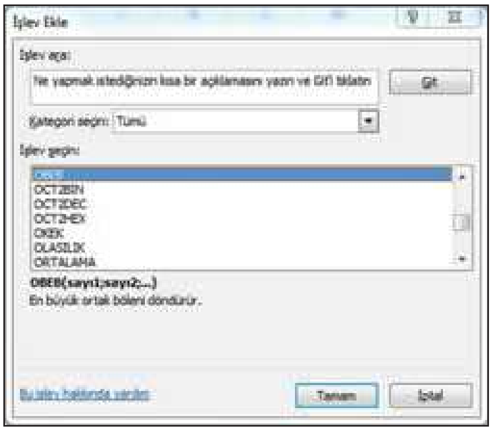
Taner Bey'in kumaşları kaç metre uzunluğunda parçalara ayıracağını bir elektronik tablolama programı yardımıyla hesaplayalım.

Çözüm

Kumaşlar eşit büyüklükte en büyük parçalara bölüneceğinden verilen sayıların EBOB unu bulmalıyız. Excel programı açıldıktan sonra 16, 24, 32, 48 ve 64 sayılarını aşağıdaki gibi yazalım.

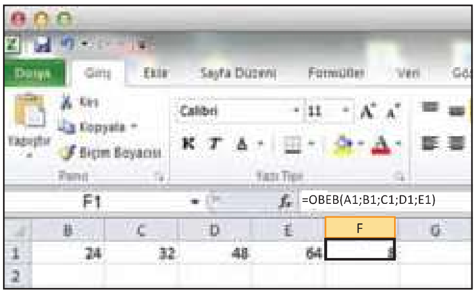


F1 kutusuna tıkladıktan sonra  tuşuna tıklayalım. Aşağıdaki gibi açılan pencerede "OBEB" sekmesini seçerek "Tamam" butonuna tıklayalım.



Yeni açılan pencerede sayı1 bölümüne A1, sayı2 bölümüne B1, sayı3 bölümüne C1, sayı4 bölümüne D1, sayı5 bölümüne E1 yazarak "Tamam" tuşuna basalım.

F1 kutusundaki sayı 16, 24, 32, 48 ve 64 sayılarının EBOB udur.



O hâlde OBEB (16, 24, 32, 48, 64) = 8 olduğundan Taner Bey kumaşları 8 m uzunluğunda parçalara ayırmalıdır.

Sıra Sizde

16, 24, 32, 48 ve 64 sayılarının EKOK unu Excel programı yardımıyla hesaplayınız.

Örnek

30 ve x sayılarının EBOB u 10, EKOK u 120 olduğuna göre x sayısını bulalım.

Çözüm

30 ve x sayma sayılarının çarpımı bu sayıların EBOB u ile EKOK unun çarpımına eşittir. O hâlde $30 \cdot x = \text{EBOB}(30, x) \cdot \text{EKOK}(30, x)$ olur.

Buradan $30 \cdot x = 10 \cdot 120 \Rightarrow x = 40$ bulunur.

! a, b pozitif tam sayıları için $a \cdot b = \text{EBOB}(a, b) \cdot \text{EKOK}(a, b)$ dir.

Örnek

Bir torbadaki bilyeler üçerli, dörderli ve beşerli gruplandığında her seferinde 2 bilye artmaktadır.

Torbadaki bilye sayısının en az kaç tane olabileceğini bulalım.

Çözüm

Bilyeler üçerli, dörderli ve beşerli gruplandığında her seferinde 2 bilye artıyor ise, bilyelerin sayısı 3, 4 ve 5 in en küçük ortak katı olan sayının 2 fazlasıdır.

$\text{OKEK}(3, 4, 5) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ olup bilye sayısı en az $60 + 2 = 62$ olur.

Örnek

Boyutları 24 metre ve 72 metre olan dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın etrafındaki her köşeye bir ağaç gelecek şekilde eşit aralıklarla ağaçlar dikilecektir.

Bunun için en az kaç ağaç gerekeceğini bulalım.

Çözüm

$\text{EBOB}(24, 72) = 24$ olduğundan 24 m aralıklarla ağaç dikilmelidir.

Tarlanın çevresi $2 \cdot (24 + 72) = 192$ m olduğundan en az $192 : 24 = 8$ ağaç dikilir.

1. 400 sayısından en az hangi sayı çıkartılmalıdır ki kalan sayı 3, 5 ve 9 ile tam bölünebilsin?

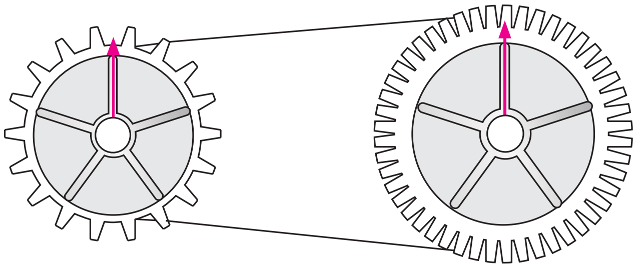
2. EKOK(A, B) + EBOB(A, B) = 80 ve 3A = 5B olduğuna göre A + B kaçtır?

3. a, b sayıları aralarında asal pozitif tam sayılardır.

$\frac{30}{a} + b = 18$ ve EKOK(a, b) = 150 olduğuna göre a sayısını bulunuz.

4. Mehmet'in bisikletinin ön dişlisinin 48, arka dişlisinin 18 dişi vardır.

Yandaki konumda iken hareket eden dişlilerin tekrar aynı konuma gelmeleri için en az kaç tur dönmeleri gerekmektedir?



5. 350 ve 450 sayılarını tam bölen en büyük doğal sayı kaçtır?

6. a, b, c sayıları doğal sayı olmak üzere K = 3a + 2 = 5b + 2 = 7c + 2 olduğuna göre K nin en küçük değerini bulunuz.

7. Bir hastanede çalışan Melek, Nurşen ve Nevin sırası ile 3, 4 ve 5 günde bir nöbet tutmaktadır.

Bu üç kişi birlikte nöbete başladıktan kaç gün sonra 3. kez birlikte tekrar nöbet tutacaklardır?

8. Boyutları 6 cm, 8 cm ve 12 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki tuğlalar kullanılarak bir küp yapılmak isteniyor.

Bunun için en az kaç tane tuğla gerekir?

9. Yusuf yapacağı dolap için kullanacağı rafları hazırlayacaktır.

120 cm x 150 cm ebatındaki tahtadan parça artırmadan eşit büyüklükte en az kaç tane raf kesebilir?