

⇒ **Örnek**

$s(A^1) = 10$, $s(B^1) = 7$ ve $s(B) = 17$ olduğuna göre $s(A)$ nı bulalım.

⇒ **Çözüm**

$s(E) = s(B) + s(B^1) = 17 + 7 = 24$ olur.

$s(E) = s(A) + s(A^1) \Rightarrow 24 = s(A) + 10$

$\Rightarrow s(A) = 24 - 10 \Rightarrow s(A) = 14$ bulunur.



A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$s(A) + s(B^1) = 16$ ve $s(A^1) + s(B) = 14$

olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?

⇒ **Örnek**

E evrensel küme ve A herhangi bir küme olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

- $E^1 = \emptyset$
- $\emptyset^1 = E$
- $A^1 \cap A = \emptyset$
- $A^1 \cup A = E$
- $(A^1)^1 = A$

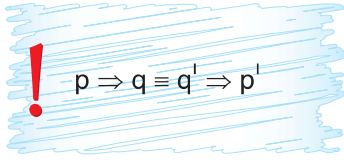
$$A^1 = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$$

⇒ **Çözüm**

- $E^1 = \{x \mid x \notin E \text{ ve } x \in E\} = \emptyset$ olur.
- $\emptyset^1 = \{x \mid x \notin \emptyset \text{ ve } x \in E\} = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \in E\} = \{x \mid x \in E\} = E$ olur.
- $A^1 \cap A = \{x \mid x \in A^1 \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in A\} = \emptyset$ olur.
- $A^1 \cup A = \{x \mid x \in A^1 \text{ veya } x \in A\} = \{x \mid x \in E\} = E$ olur.
- $(A^1)^1 = \{x \mid x \notin A^1 \text{ ve } x \in E\} = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in E\} = A \cap E = A$ olur.

Bilgi Kutusu

- ❖ Evrensel kümenin tümleyeni boş kümedir. Yani $E^1 = \emptyset$ tir.
- ❖ Boş kümenin tümleyeni evrensel kümedir. Yani $\emptyset^1 = E$ tir.
- ❖ Her A kümesi için $A^1 \cap A = \emptyset$ ve $A^1 \cup A = E$ tir.
- ❖ Her A kümesi için $(A^1)^1 = A$ tir.



$$p \rightarrow q \equiv q' \rightarrow p'$$

Örnek

Her A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ise $B' \subseteq A'$ olduğunu gösterelim.

Çözüm

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B] \Rightarrow [(x \in B)' \Rightarrow (x \in A)'] \\ &\Rightarrow [x \notin B \Rightarrow x \in A] \\ &\Rightarrow [x \in B' \Rightarrow x \in A'] \Rightarrow B' \subseteq A' \text{ olur.} \end{aligned}$$



$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri veriliyor.
 B' ile A' kümelerini bulup karşılaştırınız.

Bilgi Kutusu



Her A ve B kümesi için $A \subseteq B$ ise $B' \subseteq A'$ olur.

Örnek

A ve B herhangi iki küme olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

$$\text{a) } (A \cup B)' = A' \cap B' \qquad \text{b) } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Çözüm

$$\begin{aligned} \text{a) } (A \cup B)' &= \{x \mid x \in (A \cup B)'\} = \{x \mid x \notin (A \cup B)\} \\ &= \{x \mid [x \in (A \cup B)]'\} = \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B)'\} \\ &= \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \notin B\} = \{x \mid x \in A' \text{ ve } x \in B'\} \\ &= A' \cap B' \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (A \cap B)' &= \{x \mid x \in (A \cap B)'\} = \{x \mid x \notin (A \cap B)\} \\ &= \{x \mid [x \in (A \cap B)]'\} = \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B)'\} \\ &= \{x \mid x \notin A \text{ veya } x \notin B\} = \{x \mid x \in A' \text{ veya } x \in B'\} \\ &= A' \cup B' \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bilgi Kutusu



De Morgan Kuralları

A ve B herhangi iki küme olmak üzere
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$ tir.

⇒ **Örnek**

A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere $(A \cup B) \cap (A' \cap B)'$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

⇒ **Çözüm**

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A' \cap B)' &= (A \cup B) \cap (A \cup B') \\ &= A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A \text{ olur.} \end{aligned}$$

⇒ **Örnek**

A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere $[(A \cup B)' \cup (A \cap B')] \cup B$ ifadesini en sade şekilde yazalım.

⇒ **Çözüm**

$$\begin{aligned} [(A \cup B)' \cup (A \cap B')] \cup B &= [(A' \cap B') \cup (A \cap B')] \cup B \\ &= [(A' \cup A) \cap B'] \cup B \\ &= (E \cap B') \cup B = B' \cup B = E \text{ olur.} \end{aligned}$$



A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere $(A \cup B) \cap (A \cap B)'$ ifadesini en sade şekilde yazınız.

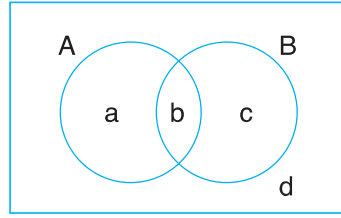
⇒ **Örnek**

Bir araştırmada 100 kişiye A veya B gazetelerinden hangisini okudukları sorulmuştur. 55 kişi A gazetesini, 60 kişi B gazetesini okuduğunu, 24 kişi ise ikisini de okumadığını belirtmiştir.

Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

- A gazetesini okumayan kişi sayısı
- B gazetesini okumayan kişi sayısı
- A ve B gazetelerini okumayan kişi sayısı

⇒ **Çözüm**



a, b, c, d içinde buldukları kümele-
rin eleman sayılarını göstermektedir.

$$a + b = 55, b + c = 60, d = 24, a + b + c + d = 100 \text{ olur.}$$

$$a + b + c + d = 100 \Rightarrow 55 + c + 24 = 100 \Rightarrow c = 21,$$

$$b + c = 60 \Rightarrow b = 60 - 21 = 39,$$

$$a + b = 55 \Rightarrow a = 55 - 39 = 16 \text{ olur.}$$

a) A gazetesini okumayan $s(A^c) = c + d = 21 + 24 = 45$ kişidir.

b) B gazetesini okumayan $s(B^c) = a + d = 16 + 24 = 40$ kişidir.

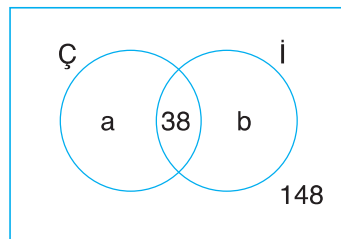
c) A ve B gazetelerini okumayan
 $s((A \cap B)^c) = a + c + d = 16 + 21 + 24 = 61$ kişidir.

⇒ **Örnek**

Bir okulda Çanakkale'ye ve İstanbul'a iki farklı gezi düzenlenmiştir. Çanakkale gezisine gitmeyenlerin sayısı İstanbul gezisine gitmeyenlerin sayısından 42 fazladır. Gezilerin her ikisine de giden 38 kişi ve ikisine de gitmeyen 148 kişidir.

Okulun mevcudu 450 olduğuna göre İstanbul gezisine giden kaç kişi olduğunu bulalım.

⇒ **Çözüm**



Çanakkale ve İstanbul gezilerine gi-
denlerin kümesi sırayla Ç ve İ olsun.
Kümelerin içindeki harfler ve sayılar o
kümelerin eleman sayılarını göster-
mektedir.

Çanakkale gezisine gitmeyenlerin sayısı $b + 148$, İstanbul gezisine gitmeyenlerin sayısı $a + 148$ olduğundan

$$b + 148 = a + 148 + 42 \Rightarrow b = a + 42 \text{ olur.}$$

$$a + b + 38 + 148 = 450 \Rightarrow a + b = 264$$

$$\Rightarrow a + a + 42 = 264 \Rightarrow a = 111 \text{ olur.}$$

$$b = a + 42 \Rightarrow b = 111 + 42 = 153 \text{ bulunur.}$$

O hâlde İstanbul gezisine gidenlerin sayısı $38 + b = 38 + 153 = 191$ olur.

Kümeler ile Sembolik Mantık Arasındaki İlişki

Kümeler ile sembolik mantık arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sembolik Mantık	Kümeler
0	\emptyset
1	E
\vee	\cup
\wedge	\cap
' (Değili)	' (Tümleyeni)
\equiv	=
$(p)'\equiv p$	$(A)'\equiv A$
$p \wedge p' \equiv 0$	$A \cap A' = \emptyset$
$p \vee p' \equiv 1$	$A \cup A' = E$
$1 \wedge 0 \equiv 0$	$E \cap \emptyset = \emptyset$
$1 \vee 0 \equiv 1$	$E \cup \emptyset = E$
$(p \wedge q)'\equiv p' \vee q'$	$(A \cap B)'\equiv A' \cup B'$
$(p \vee q)'\equiv p' \wedge q'$	$(A \cup B)'\equiv A' \cap B'$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Örnek

$(A \cup B) \cap (A' \cap B)'$ işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçiminde yazalım.

Çözüm

Kümeler ile sembolik mantık arasındaki ilişkilerden yararlanarak A kümesi yerine p önermesi, B kümesi yerine q önermesi, \cup işlemi yerine \vee , \cap işlemi yerine \wedge yazarsak $(p \vee q) \wedge (p' \wedge q)'$ önermesini elde ederiz.

Mantık kurallarını uygularsak

$(p \vee q) \wedge (p' \wedge q)'\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q')\equiv p \vee (q \wedge q')\equiv p \vee 0\equiv p$ elde ederiz.

A kümesini p önermesi ile gösterdiğimiz için $(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = A$ olur.

Örnek

$[(A \cup B)' \cap (A \cap B)'] \cup A$ işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçimde yazalım.

Çözüm

A kümesi yerine p önermesi, B kümesi yerine q önermesi, \cup işlemi yerine \vee , \cap işlemi yerine \wedge yazarsak $[(p \vee q)' \wedge (p \wedge q)'] \vee p$ önermesini elde ederiz. Mantık kurallarını uygularsak

$$\begin{aligned} [(p \vee q)' \wedge (p \wedge q)'] \vee p &\equiv [(p \vee q) \vee (p \wedge q)'] \vee p \\ &\equiv [(p \vee p') \vee (q \vee q)'] \vee p \\ &\equiv (1 \vee q) \vee p \equiv 1 \vee p \equiv 1 \text{ elde ederiz.} \end{aligned}$$

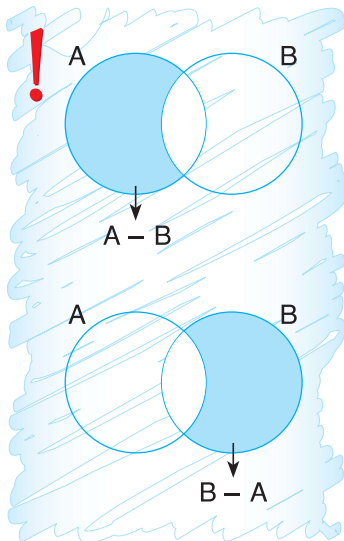
Sembolik mantıkta 1, kümelerde E ile gösterildiğinden

$$[(A \cup B)' \cap (A \cap B)'] \cup A = E \text{ olur.}$$



$[(A' \cap B) \cup A] \cup (A' \cap B)'$ işlemini sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade biçimde yazınız.

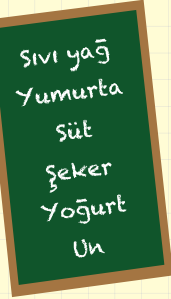
! $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$



Kümelerde Fark İşlemi



Zübeyde misafirlerine kek yapacaktır. Evinde yoğurt, un, süt, kakao ve pasta kreması vardır. Yapacağı kekin tarifinde kullanılacak malzemelerin olduğu liste yanda verilmiştir.



- » Malzeme listesinde olup Zübeyde'nin evinde olmayan malzemeleri söyleyiniz.
- » Zübeyde'nin evinde olup malzeme listesinde olmayan malzemeleri söyleyiniz.

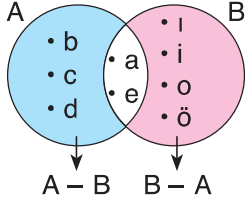
Bilgi Kutusu



A ve B iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A fark B kümesi** denir. $A - B$ veya $A \setminus B$ ile gösterilir.

⇒ **Örnek**

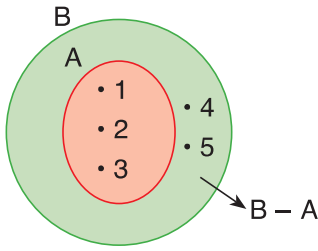
$A = \{a, b, c, d, e\}$ ve $B = \{a, e, i, o, ö\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini yazalım. Venn şeması ile gösterelim.

⇒ **Çözüm**

A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesi $A - B = \{b, c, d\}$, B kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanların kümesi $B - A = \{i, o, ö\}$ şeklindedir. Bu kümelerin Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

⇒ **Örnek**

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri için $B - A$ kümesini yazalım. Venn şeması ile gösterelim.

⇒ **Çözüm**

$B - A = \{4, 5\}$ olup Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

⇒ **Örnek**

$A \neq B$ olmak üzere $A - B = A \cap B^1$ olduğunu gösterelim.

⇒ **Çözüm**

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B^1\} = A \cap B^1$ olur.

Bilgi Kutusu

$A \neq B$ olmak üzere $A - B = A \cap B^1$ tir.

⇒ **Örnek**

$A \neq B$ olmak üzere $A - B \neq B - A$ olduğunu gösterelim.

⇒ **Çözüm**

$A - B = A \cap B^1$ ve $B - A = B \cap A^1$ olup $A - B \neq B - A$ dir.



$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümeleri için $A - B$ ve $B - A$ kümelerini bulup karşılaştırınız.

Bilgi Kutusu



$A \neq B$ olmak üzere $A - B \neq B - A$ dir.

Örnek

$A \subseteq E$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

- a) $A - A = \emptyset$ b) $\emptyset - A = \emptyset$ c) $A - \emptyset = A$

Çözüm

- a) $A - A = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in A^c\} = A \cap A^c = \emptyset$ olur.
 b) $\emptyset - A = \{x \mid x \in \emptyset \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \in \emptyset \wedge x \in A^c\} = \emptyset \cap A^c = \emptyset$ olur.
 c) $A - \emptyset = \{x \mid x \in A \wedge x \notin \emptyset\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in \emptyset^c\}$
 $= \{x \mid x \in A \wedge x \in E\} = A \cap E = A$ olur.

Bilgi Kutusu



$A \subseteq E$ olmak üzere

- ❖ $A - A = \emptyset$,
- ❖ $\emptyset - A = \emptyset$,
- ❖ $A - \emptyset = A$ tir.

Örnek

$A \subseteq E$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

- a) $A - E = \emptyset$ b) $E - A = A^c$

Çözüm

- a) $A - E = \{x \mid x \in A \wedge x \notin E\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in E^c\}$
 $= \{x \mid x \in A \wedge x \in \emptyset\} = A \cap \emptyset = \emptyset$ olur.
 b) $E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \in E \wedge x \in A^c\} = E \cap A^c = A^c$ olur.

Bilgi Kutusu



$A \subseteq E$ olmak üzere

- ❖ $A - E = \emptyset$,
- ❖ $E - A = A^c$ tir.

Bilgi Kutusu



$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$ tir.

⇒ Örnek

$s(A - B) = 3$, $s(B - A) = 6$ ve $s(A \cup B) = 12$ olduğuna göre $s(B)$ nı bulalım.

⇒ Çözüm

$$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B) \Rightarrow 12 = 3 + 6 + s(A \cap B) \\ \Rightarrow s(A \cap B) = 3 \text{ olur.}$$

$$s(B) = s(B - A) + s(A \cap B) = 6 + 3 = 9 \text{ bulunur.}$$

⇒ Örnek

$A \neq B$ ve $A \cap B \neq \emptyset$, $s(A - B) = 2x - 1$, $s(B - A) = 3 - x$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nin en az kaç olacağını bulalım.

⇒ Çözüm

$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$ dir. $s(A \cup B)$ nin en az olması için $s(A \cap B)$ en az olmalıdır. $A \cap B \neq \emptyset$ olduğundan $s(A \cap B)$ en az 1 dir.

$$s(A \cup B) = 2x - 1 + 3 - x + 1 = x + 3 \text{ olur.}$$

x in en küçük değeri için 1 verebiliriz. O hâlde $s(A \cup B) = 1 + 3 = 4$ olur.

⇒ Örnek

A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun.

$3 \cdot s(A \cap B) = s(B - A) = 2 \cdot s(A - B)$ ve $s(A \cup B) = 33$ olduğuna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

⇒ Çözüm

$3 \cdot s(A \cap B) = s(B - A) = 2 \cdot s(A - B)$ olduğuna göre $s(A \cap B) = 2k$, $s(B - A) = 6k$, $s(A - B) = 3k$ olur.

$$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$$

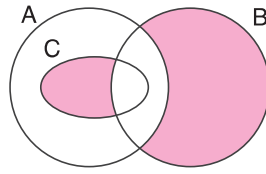
$$\Rightarrow 33 = 3k + 6k + 2k \Rightarrow 33 = 11k \Rightarrow k = 3 \text{ olur.}$$

O hâlde $s(A \cap B) = 2k = 2 \cdot 3 = 6$ bulunur.



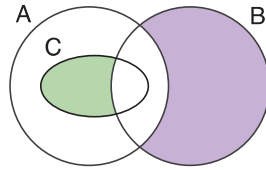
Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için $s(A \cup B) = 3 \cdot s(A - B) = 4 \cdot s(B - A)$ ve $s(A \cap B) = 10$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ kaçtır?

⇒ **Örnek**



Yandaki Venn şemasında verilen boyalı bölgeyi ifade eden kümeyi yazalım.

⇒ **Çözüm**



Yeşil renkle boyalı olan bölge $C - B$, mor renkle boyalı olan bölge $B - A$ kümelerini ifade ettiğinden verilen boyalı bölgeyi $(C - B) \cup (B - A)$ şeklinde yazabiliriz.

⇒ **Örnek**

Bir sınıfta matematik dersinden başarılı olan herkes kimya dersinden de başarılıdır. Kimya dersinden başarılı olup matematik dersinden başarısız olan öğrencilerin sayısı, matematik dersinden başarılı olan öğrencilerin sayısından 10 fazladır.

Bu sınıfta kimya dersinden başarılı olan 28 öğrenci olduğuna göre matematik dersinden başarılı olan öğrenci sayısını bulalım.

⇒ **Çözüm**

Matematik dersinden başarılı olan öğrencilerin kümesi M , kimya dersinden başarılı olan öğrencilerin kümesi K olsun.

$M \subseteq K$ ve $s(K - M) = s(M) + 10$ ve $s(K) = 28$ olur. O hâlde

$$s(K - M) + s(M) = s(K) \Rightarrow s(M) + 10 + s(M) = 28$$

$$\Rightarrow 2 \cdot s(M) = 18 \Rightarrow s(M) = 9 \text{ olur.}$$

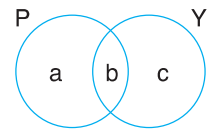
⇒ **Örnek**

Bir gruptaki öğrenciler piyano veya yüzme kursuna gitmektedir. 21 kişilik bu grupta yüzme kursuna gidip piyano kursuna gitmeyen 7 ve yüzme kursuna gitmeyen 8 öğrenci vardır.

Grupta 21 öğrenci olduğuna göre piyano ve yüzme kursuna giden öğrenci sayısını bulalım.

⇒ **Çözüm**

Piyano kursuna giden öğrencilerin kümesini P , yüzme kursuna giden öğrencilerin kümesini Y ile gösterelim. a, b, c harfleri içinde bulunduğu kümelerin eleman sayılarını göstermek üzere

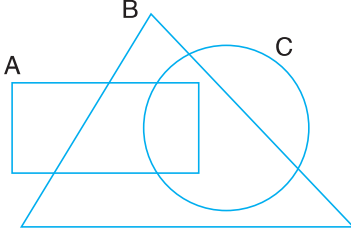


$$c = 7, a = 8, a + b + c = 21 \text{ olur.}$$

$$a + b + c = 21 \Rightarrow 8 + 7 + b = 21 \Rightarrow b = 6 \text{ bulunur.}$$

1. $s(A \cap B^c) = 6$, $s(A \cap B) = 4$, $s(A \cup B) = 15$ olduğuna göre $s(B - A)$ kaçtır?

2.



Yanda verilen Venn şemasında $[(A \cap B) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$ kümesini boyayarak gösteriniz.

3. $s(A) = 8$, $s(B) = 4$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

4. $s(A) = s(B) = s(C) = 10$, $s(A \cap B) = s(A \cap C) = s(B \cap C) = 2 \cdot s(A \cap B \cap C)$ ve $s(A \cup B \cup C) = 20$ olduğuna göre $s(A \cap B \cap C)$ kaçtır?

5. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere $(A^c \cup B^c) \cup (A \cap B)$ ifadesinin en sade şeklini yazınız.

6. $A^c \cup [(A \cup B)^c \cup B]$ işleminin sembolik mantık kurallarını kullanarak en sade şekilde yazınız.

7. 38 kişilik bir sınıfta matematik kursuna gitmeyen 16 kişi, fizik kursuna gitmeyen 24 kişi ve her iki kursa giden 8 kişi vardır.

Buna göre iki kursa da gitmeyen kaç kişi vardır?

8. Bir seyahat acentasında çalışanlar Rusça ve İngilizceden en az birini bilmektedir. Rusçayı bilenlerin sayısı İngilizceyi bilenlerin sayısının 2 katı, sadece İngilizceyi bilenlerin sayısının 3 katıdır.

Acentada 24 kişi çalıştığına göre Rusçayı bilen kaç kişi vardır?

9. Dans veya tiyatro kursundan en az birine gidenlerden oluşan bir gruptaki kişilerin %54 ü dans kursuna, %58 i tiyatro kursuna gitmektedir.

Bu grupta her iki kursa giden 24 kişi olduğuna göre gruptaki kişi sayısı kaçtır?

10. 41 kişilik bir sınıftaki sarışın erkeklerin sayısı esmer erkeklerin sayısının yarısı, sarışın kızların sayısının 2 katıdır.

Bu sınıftaki esmer kız sayısı 6 olduğuna göre sarışın kişi sayısı kaçtır?

9.2.2.2. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Sıralı İkili



Konsere bilet alan Erkan sıra numarasını ve koltuk numarasını aklında (sıra no, koltuk no) olacak şekilde tutuyor. Konser salonunda iken (10, 8) olarak hatırlıyor ve 10. sıradaki 8 nolu koltuğa oturuyor.

» Yandaki bilet Erkan'ın bileti olduğuna göre Erkan biletini aldığı koltuğa mı oturmuştur?



Bilgi Kutusu



A ve B boş olmayan iki küme olsun. A kümesinden a elemanı, B kümesinden b elemanı alınarak yazılan (a, b) biçimindeki elemana **sıralı ikili** denir. a ya birinci bileşen, b ye ikinci bileşen denir. Sıralı ikilide bileşenlerin yazılış sırası önemlidir. Yani $(a, b) \neq (b, a)$ dir.

Örnek

0 ile 6 arasındaki tam sayılardan (tek sayı, asal sayı) şeklinde beş tane sıralı ikili yazalım.

Çözüm

0 ile 6 arasındaki tek sayıların kümesi $A = \{1, 3, 5\}$ ve asal sayıların kümesi $B = \{2, 3, 5\}$ tir. (tek sayı, asal sayı) şeklinde yazılabilecek sıralı ikililerden beşi $(3, 3), (5, 2), (1, 2), (3, 5), (3, 2)$ olur.

Bilgi Kutusu



(a, b) ve (c, d) şeklindeki iki sıralı ikilinin birinci bileşenleri birbirine, ikinci bileşenleri birbirine eşitse bu sıralı ikililer birbirine eşittir ve $(a, b) = (c, d)$ şeklinde yazılır.

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ tir.

⇒ **Örnek**

$(3x - 1, 7) = (-4, 2y - 3)$ eşitliğini sağlayan x ve y sayılarını bulalım.

⇒ **Çözüm**

Sıralı ikililerin eşitliğinde birinci bileşenler birbirine, ikinci bileşenler birbirine eşittir. O hâlde

$3x - 1 = -4 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$ ve $2y - 3 = 7 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5$ bulunur.

Kartezyen Çarpım

Ankara'dan Sivas'a hava, kara ve demir yolu ile; Sivas'tan Antalya'ya hava ve kara yolu ile ulaşım sağlanabilmektedir.

- » Ankara'dan Sivas'a, Sivas'tan da Antalya'ya gitmek isteyen bir kişinin kaç farklı yoldan gidebileceğini söyleyiniz ve bu seçenekleri sıralı ikililer şeklinde yazınız.

! İki kümenin kartezyen çarpımı sıralı ikililerden oluşan bir kümedir.

Bilgi Kutusu

A ve B boş olmayan iki küme olsun. Birinci bileşeni A, ikinci bileşeni B kümesinin elemanı olan tüm sıralı ikililerin kümesine **A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı** denir ve $A \times B$ şeklinde gösterilir.

! $A \times B = \{x, y \mid x \in A \wedge y \in B\}$

⇒ **Örnek**

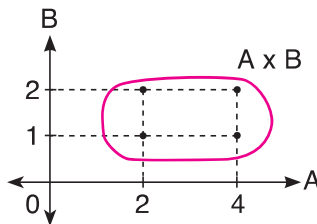
$A = \{2, 4\}$ ve $B = \{1, 2\}$ kümeleri veriliyor.

$A \times B$ kümesini liste biçiminde yazarak grafiğini çizelim.

⇒ **Çözüm**

$A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2)\}$ olur.

$A \times B$ kümesinin elemanı olan sıralı ikililere koordinat sisteminde karşılık gelen noktalar $A \times B$ nin grafiğini oluşturur.





Rene Descartes
(Röne Deskart)
(1596-1650)

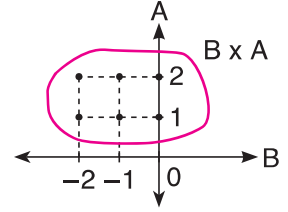
Fransız matematikçi, bilim adamı ve filozoftur. Matematiğe en büyük katkısı analitik geometri üzerine yaptığı çalışmalarıdır. Cebirin geometriye uygulanması üzerine çalışmış, kartezyen geometri ifadesini ortaya atmıştır. Kartezyen koordinat sisteminin onun tarafından bulunduğu kabul edilir.

⇒ **Örnek**

$A = \{x \mid 0 < x < 3, x \text{ tam sayı}\}$ ve $B = \{-2, -1, 0\}$ kümeleri veriliyor. $B \times A$ kümesini liste biçiminde yazarak grafiğini çizelim.

⇒ **Çözüm**

$A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$ için
 $B \times A = \{(-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (-2, 2), (-1, 2), (0, 2)\}$ olur.
 $B \times A$ nın grafiği yandaki gibidir.



$A = \{x \mid 2 \leq x < 5, x \text{ asal sayı}\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$ kümeleri için $A \times B$ nin grafiğini çiziniz.

⇒ **Örnek**

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ kümeleri veriliyor. $A \times B$ kümesini yazalım ve $s(A \times B)$ nı bulalım.

⇒ **Çözüm**

$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b), (1, c), (2, c), (3, c)\}$ dir. O hâlde $s(A \times B) = 9$ olur.

Bilgi Kutusu



$$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) \text{ tir.}$$

⇒ **Örnek**

$s(A \times A) = 16$ olduğuna göre $s(A)$ nı bulalım.

⇒ **Çözüm**

$$s(A \times A) = s(A) \cdot s(A) \Rightarrow [s(A)]^2 = 16 \Rightarrow s(A) = 4 \text{ bulunur.}$$

⇒ **Örnek**

$A = \{1, 2\}$, $B = \{ \}$ kümeleri için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini bulalım.

⇒ **Çözüm**

B boş küme olduğu için sıralı ikililer yazılamaz. Bu nedenle $A \times B = \emptyset$ ve $B \times A = \emptyset$ olur.

Bilgi Kutusu



- ❖ $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ dir.
- ❖ $A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ tir.

⇒ Örnek

$A = \{1, 2\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümeleri veriliyor.

$A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini yazarak karşılaştıralım.

⇒ Çözüm

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$ ve

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ olur.

$A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini karşılaştırdığımızda kümelerin birbirine eşit olmadığını görürüz.

Bilgi Kutusu



Kartezyen çarpım işleminin değişme özelliği yoktur. Yani $A \times B \neq B \times A$ dir.

⇒ Örnek

$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{b, 2\}$ kümeleri için aşağıdaki kümeleri yazarak karşılaştıralım.

- a) $A \times (B \cap C)$ b) $(A \times B) \cap (A \times C)$

⇒ Çözüm

a) $B \cap C = \{b\}$ olup $A \times (B \cap C) = \{(1, b), (2, b)\}$ dir.

b) $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$ ve

$A \times C = \{(1, b), (1, 2), (2, b), (2, 2)\}$ dir.

Buradan $(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, b), (2, b)\}$ dir.

a ve b maddelerinde bulduğumuz kümeleri karşılaştırdığımızda kümelerin birbirine eşit olduğunu görürüz.



$A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{b, 2\}$ kümeleri için aşağıda istenenleri yazıp karşılaştırınız.

- a) $(B \cap C) \times A$ ile $(B \times A) \cap (C \times A)$
- b) $A \times (B \cup C)$ ile $(A \times B) \cup (A \times C)$
- c) $(B \cup C) \times A$ ile $(B \times A) \cup (C \times A)$

Bilgi Kutusu



- ❖ Kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ve $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$ tir.
- ❖ Kartezyen çarpım işleminin kesişim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ve $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$ tir.

Örnek

$A = \{x \mid 3 \leq x < 5, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{y \mid -2 \leq y \leq 1, y \in \mathbb{Z}\}$ ve $C = \{1, 2\}$ kümeleri veriliyor.

$s[(A \times C) \cup (A \times B)]$ nı bulalım.

Çözüm

$A = \{3, 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, $C = \{1, 2\}$ ve $C \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dir.

$s(A) = 2$ ve $s(C \cup B) = 5$ olduğundan

$s[(A \times C) \cup (A \times B)] = s[A \times (C \cup B)] = s(A) \cdot s(C \cup B) = 2 \cdot 5 = 10$ bulunur.

Örnek

$s(A) = 2$, $s(B) = 6$, $s(C) = 8$ olduğuna göre $(A \times B) \cap (A \times C)$ kümesinin eleman sayısının en çok kaç olacağını bulalım.

Çözüm

$s[(A \times B) \cap (A \times C)] = s[A \times (B \cap C)]$ dir.

$s(B \cap C)$ nin en büyük değerini alması için $B \subseteq C$ olmalıdır.

O hâlde $s(B \cap C) = 6$ olur.

$s[A \times (B \cap C)] = s(A) \cdot s(B \cap C) = 2 \cdot 6 = 12$ bulunur.

1. Aşağıda verilen eşitliklerde x ve y değerlerini bulunuz.

a) $(2^x + 1, y^3) = (17, 27)$

b) $(3x + 4, 3) = (13, x - y)$

c) $(x - y, 4) = (5, x + y)$

2. Aşağıda verilen kümeler için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini yazınız ve grafiklerini çiziniz.

a) $A = \{-2, 0, 2\}$ ve $B = \{3, 5\}$

b) $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{-2, -1\}$

c) $A = \{4\}$ ve $B = \{4\}$

3. $s(A) = 6$ olduğuna göre $s(A \times A)$ kaçtır?

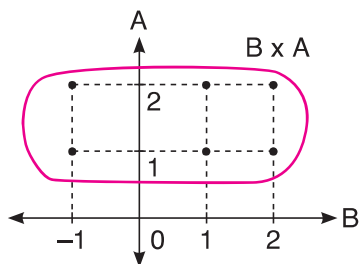
4. $A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $A \times A$ kümesinin elemanlarını dışarıda bırakmayan en küçük çaplı dairenin yarıçapının uzunluğunu bulunuz.

5. $s(A) = 4$, $s(A \times B) = 12$, $s(A \cup B) = 5$ olduğuna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

6. $s(A) = 4$, $s(B) = 5$ ve $s(C) = 7$ olduğuna göre $[(A \times B) \cup (A \times C)]$ en çok kaç olur?

7. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ ve $C = \{e, f, g, h\}$ olduğuna göre $s[(A \times B) \cup (A \times C)]$ ve $s[(A \times C) \cap (B \times C)]$ kaçtır?

8.



Yanda $B \times A$ kümesinin grafiği verilmiştir.

$C = \{0, 1, 2\}$ olduğuna göre $s[A \times (B \cap C)]$ kaçtır?

1. Aşağıdaki kümelerden hangisinin eleman sayısı diğerlerinden farklıdır?

- A) $K = \{x \mid -2 \leq x < 4, x \in \mathbb{N}\}$
 B) $L = \{x \mid x^2 < 10, x \in \mathbb{N}\}$
 C) $M = \{x \mid -5 < x \leq -1, x \in \mathbb{Z}\}$
 D) $N = \{x \mid x, 6 \text{ nın tam sayı bölenleri}\}$
 E) $P = \{x \mid x, 10 \text{ dan küçük asal sayı}\}$

2. A ve B, E evrensel kümesinin ayrık olmayan iki alt kümesidir.

- $A \not\subseteq B$, $s(A) = 4$ ve $s(B) = 8$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ en az kaçtır?
 A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

3. $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}, c\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

- A) $a \in A$ B) $\{a\} \subset A$
 C) $\{a, b\} \subset A$ D) $\{a, b\} \in A$
 E) $\{c\} \in A$

4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$,
 $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ ve E evrensel kümesi için $A \cup B \cup C = E$ tir.

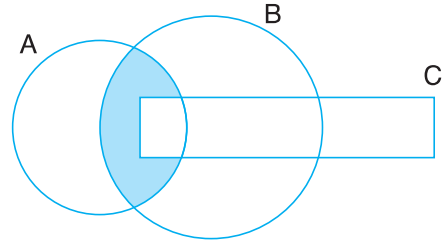
Buna göre $(B^1 - A) \cup (B - C^1)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\{ \}$ B) $\{4, 5, 6\}$
 C) $\{5, 6, 7, 8\}$ D) $\{4, 5, 6, 7\}$
 E) $\{4, 5, 6, 7, 8\}$

5. A kümesinin alt küme sayısı B kümesinin öz alt küme sayısından 95 eksiktir.

- $s(A) = 5$ olduğuna göre $s(B)$ kaçtır?
 A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

- 6.



Venn şemasında gösterilen boyalı bölgeyi gösteren küme aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) $(A \cap B) - C$ B) $(B - A) - C$
 C) $A^1 \cap B \cap C$ D) $A \cap B^1 \cap C$
 E) $(A - C) \cup B$

7. Eleman sayılarının toplamı 8 olan iki kümenin alt kümelerinin sayılarının toplamı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 32 B) 40 C) 68 D) 128 E) 257

8. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesidir.

- $s(A - B) = 3$
 $s(A^1) = 9$
 $s(B) = 10$
 $s(E) = 2 \cdot s(A)$ olduğuna göre $s[(A \cup B)^1]$ kaçtır?
 A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

9. A ve B, E evrensel kümesinin iki alt kümesidir.

$$s(A' \cap B') = 4$$

$$s(E) = 28$$

$$4 \cdot s(A \cap B) = 2 \cdot s(A - B) = s(B)$$

olduğuna göre $s(A)$ kaçtır?

- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

10. $(A - B)' \cup (A \cap B)'$

ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

- A) E B) \emptyset C) A D) A E) $A \cap B$

11. İngilizce, Almanca, Rusçadan en az birini bilenlerden oluşan bir grupta İngilizceyi bilen Almancayı, Almancayı bilen Rusçayı bilmiyor.

İngilizceyi bilmeyen 7, Rusçayı bilmeyen 10 ve yalnız bir dil bilen 13 kişi olduğuna göre Almancayı bilen kaç kişi vardır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

12. Bir sınıftaki öğrencilerin %70 i yüzme, %40 ı okçuluk kursuna gidiyor.

Yüzme ve okçuluk kurslarından herhangi birine gitmeyenler sınıfın %30 u olduğuna göre iki kursa birden gidenler sınıfın yüzde kaçıdır?

- A) 10 B) 30 C) 40 D) 60 E) 80

13. 35 kişilik bir sınıfta satranç oynayanların, dama oynayanların ve hiçbirini oynamayanların sayıları birbirine eşittir.

İkisini birlikte oynayan 4 kişi olduğuna göre bu sınıfta satranç oynayan kaç kişi vardır?

- A) 15 B) 13 C) 12 D) 10 E) 9

14. $(3^{x+y}, x-2) = (27, y+3)$

olduğuna göre x^y kaçtır?

- A) -4 B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

15. $B = \{1, 2, 3, 4\}$

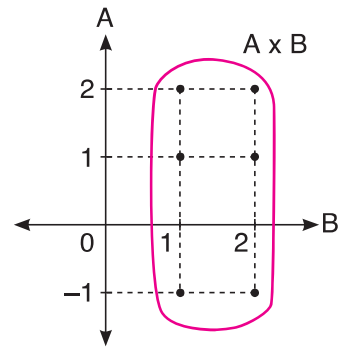
$$C = \{4, 5\}$$

$$s[(B \times A) \cup (C \times A)] = 60$$

olduğuna göre $s(A)$ kaçtır?

- A) 4 B) 6 C) 10 D) 12 E) 15

16. Aşağıda $A \times B$ nin grafiği verilmiştir.



Buna göre $s(A \cap B)$ kaçtır?

- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2