Nerelerde Karşımıza Çıkar?

Kümeler bir karmaşıklığın içerisindeki düzen olarak düşünülebilir.

Sınıflandırma, sıralama, ayırma, gruplandırma, bir araya getirme, düzenleme, yerleştirme gibi faaliyetlerin kolayca gerçekleşmesinde nesneleri kümelere ayırmaktan faydalanılır. Kütüphanede kitap düzenlerken, evde eşyaları yerleştirirken, okulda sınıflar oluşturulurken, cisimleri özelliklerine göre sınıflandırırken kümelerden yararlanırız.

9.2.1. KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR

Yanda hayvansal ve bitkisel besinlerden bazıları verilmiştir.

- En lezzetli olanları bir grup yapınız. Size göre lezzetli olan besinler herkes için lezzetli midir?
- Hayvansal ve bitkisel besinleri ayrı ayrı gruplandırınız.
- Meyveleri bir grup yapmak isteseniz bu gruba alacağınız bir meyve var mı? Bu grup için ne söyleyebilirsiniz?
- Hayvansal ve bitkisel besinlerin hepsini birlikte bir grup yapınız. Bu grup için ne söyleyebilirsiniz?

9.2.1.1. Kümeler ile İlgili Temel Kavramlar

Bazı cümlelerde belirtilen topluluklar herkes tarafından aynı şekilde anlaşılırken, bazılarında belirtilen topluluklar herkes tarafından aynı şekilde anlaşılmayabilir.

- 10 ile 20 arasındaki asal sayılar
- Türkiye'de K harfi ile başlayan bazı iller
- Alfabemizdeki sesli harfler
- Dürüst insanlar

» Yukarıdaki cümlelerde belirtilen topluluklardan hangileri herkes tarafından aynı şekilde anlaşılır?

Sembol ve Gösterimler

$\in$

$\notin$

$\varnothing$

$\{\ \}$

s(A)

$\subset$

$\supset$

$\subseteq$

$\supseteq$

$\not\subseteq$

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

{x | x in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler}

Bilgi Kutusu

Küme, birbirinden farklı ve iyi tanımlanmış nesnelerden oluşan bir topluluktur. Kümeler A, B, C, ... gibi büyük harflerle gösterilir.

Kümeyi oluşturan nesnelere **kümenin elemanı** denir. a elemanı A kümesine ait ise $a \in A$ biçiminde yazılır ve "a elemanıdır A" diye okunur. a elemanı A kümesine ait değilse $a \notin A$ biçiminde yazılır ve "a elemanı değildir A" diye okunur.

A kümesinin eleman sayısı s(A) ile gösterilir.

Örnek

Aşağıdaki toplulukların küme olup olmadığını belirleyelim. Küme olanların elemanlarını yazalım ve eleman sayılarını bulalım.

a) 2 ile 10 arasındaki tek sayılar

b) Çift asal sayılar

c) 3 ile 13 arasındaki bazı asal sayılar

Çözüm

a ve b maddelerindeki topluluklar açık ve kesin olarak belirtildiği için herkes tarafından aynı şekilde anlaşılır. Bu nedenle bu topluluklar birer küme belirtir. a maddesindeki kümenin elemanları 3, 5, 7, 9 dur. Bu kümeyi A ile gösterirsek s(A) = 4 olur. b maddesindeki kümenin elemanı 2 dir. Bu kümeyi B ile gösterirsek s(B) = 1 olur.

c maddesindeki ifade herkes tarafından aynı şekilde anlaşılmayacağından küme belirtmez.

Sıra Sizde

Aşağıdaki toplulukların hangileri küme belirtir? Küme belirtenlerin elemanlarını yazınız, eleman sayılarını bulunuz.

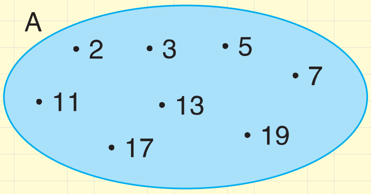
a) Karesi 20 den küçük olan tam sayılar

b) 4 ün katı olan iki basamaklı sayıların bazıları

c) 2 katının 4 fazlası 16 olan sayı

Kümelerin Farklı Gösterimleri

A = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}



A = {x | 2 ≤ x < 20, x asal sayı}

» Yukarıdaki farklı gösterimlerin hepsi aynı kümeyi belirtir mi?

John Venn
(Con Ven)

(1834-1923)

Venn şeması gösterimini matematiğe kazandıran John Venn'dir.

Venn şeması olasılık, mantık, istatistik, bilgisayar bilimleri ve kümeler kuramı gibi birçok alanda aktif olarak kullanılmaktadır.

Resimdeki mozaik cam, Cambridge Üniversitesinde ders vermiş olan John Venn'in anısına üniversitedeki fakültelerden birinde bulunmaktadır.

Bilgi Kutusu

- Kümenin elemanlarının aralarına virgül konularak { } biçiminde parantezin içine yazılmasına **liste yöntemi ile gösterme** denir.
- Kümenin elemanlarının kapalı bir eğri içine, önlerine nokta konularak yazılmasına **Venn şeması ile gösterme** denir.
- Kümeyi oluşturan elemanların ortak bir özelliği varsa kümenin elemanlarının bu özellik kullanılarak yazılmasına **ortak özellik yöntemi ile gösterme** denir. A = {x | ...} veya A = {x : ... } şeklindeki yazılımda noktalı yerlere elemanların ortak özelliği yazılır. Küme parantezi içindeki " | " ve " : " işaretleri "öyle ki" diye okunur.

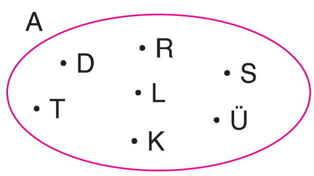
Örnek

"DÜRÜSTLÜK" kelimesinin harflerinin oluşturduğu A kümesini liste yöntemi ile yazalım ve Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

"DÜRÜSTLÜK" kelimesindeki harflerin oluşturduğu kümeyi
A = {D, R, S, T, L, Ü, K} şeklinde yazabiliriz.

Bu kümeyi Venn şeması ile yandaki gibi gösterebiliriz.



! Kümede her eleman yalnız bir kez yazılır.

Örnek

A = {–2, –1, 0, 1, 2} kümesini ortak özellik yöntemi ile gösterelim.

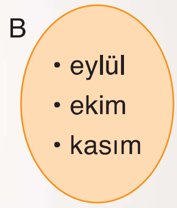
Çözüm

A kümesindeki elemanların ortak özelliklerinden biri –2 ile 2 arasında (–2 ve 2 dahil) olan tam sayılar olmasıdır. Bu özelliği kullanarak
$A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2,\ x \in \mathbb{Z}\}$ yazabiliriz.

! Kümedeki elemanların yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez.

Sıra Sizde

Venn şeması ile gösterilen B kümesini liste yöntemi ve ortak özellik yöntemi ile yazınız.



Sonlu ve Sonsuz Kümeler

$A = \{x \mid x \leq 6,\ x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \mid x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$

» A ve B kümelerinin eleman sayıları için ne söyleyebilirsiniz?

Bilgi Kutusu

- Eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilebilen kümelere **sonlu küme** denir.
- Eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilemeyen kümelere **sonsuz küme** denir.

Örnek

Aşağıdaki kümelerin sonlu küme ya da sonsuz küme olup olmadıklarını bulalım.

a) $A = \{x \mid x^2 < 9,\ x \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \{x \mid 3 < x < 6,\ x \in \mathbb{R}\}$

Çözüm

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $s(A) = 5$ olup A kümesi sonlu kümedir.

b) B kümesinin elemanları 3 ile 6 arasındaki gerçek sayılardan oluşmaktadır. Bu aralıkta sayılamayacak kadar çok gerçek sayı vardır. Bu nedenle B kümesinin eleman sayısını belirleyemeyiz. O hâlde B kümesi sonsuz kümedir.

! Birbirinden farklı iki rasyonel sayı arasında başka bir rasyonel sayı bulunabilir.

Boş Küme

$A = \{x \mid x$, haftanın K harfi ile başlayan günleri$\}$

$B = \{x \mid -1 < x < 0,\ x \in \mathbb{N}\}$

» A ve B kümelerinin eleman sayıları için ne söyleyebilirsiniz?

Bilgi Kutusu

Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. Boş küme { } veya $\varnothing$ sembolleri ile gösterilir.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(Corç Ferdinant Ludvik Filip Kantor)
(1845-1918)

Cantor, sayılar kuramı ile ilgilenmiş, matematiğe yeni bir ufuk açtığı kabul edilen kümeler kuramını kurmuştur.

Kümeler arasında bire bir eşlemenin önemini ortaya koymuş, sonsuz küme kavramına matematiksel bir tanım getirmiştir. Gerçek sayıların sonsuz ve sayılamaz bir küme olduğunu göstermiştir.

Cantor'un bire bir eşleme, kardinal sayılar, sayılabilme, Cantor problemleri ile Cantor paradoksu önde gelen çalışmalarıdır.

Örnek

Aşağıda verilen kümelerin boş küme olup olmadığını bulalım.

a) $A = \{x \mid 2x + 3 = 6,\ x \in \mathbb{N}\}$

b) B = {x | Türkiye'nin P harfi ile başlayan illeri}

Çözüm

a) $2x + 3 = 6$ ise $x = \frac{3}{2}$ dir. $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan $s(A) = 0$ olur.
O hâlde A kümesi boş kümedir.

b) Türkiye'de "P" harfi ile başlayan il olmadığından $s(B) = 0$ olur.
O hâlde B kümesi boş kümedir.

Sıra Sizde

$A = \{-3 < x < -1,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümesi boş küme midir?

Evrensel Küme

Betül yüksek lisans tezi için üniversite öğrencileri üzerinde bir araştırma yapacaktır.

» En geniş araştırma grubu için ne söyleyebilirsiniz?

Bilgi Kutusu

Üzerinde işlem yapılan kümelere ait elemanları içinde bulunduran kümeye **evrensel küme** denir. Evrensel küme E ile gösterilir.

Örnek

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ kümeleri için bir evrensel küme yazalım.

Çözüm

A ve B kümelerini içinde bulunduran $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesini yazabiliriz.

Sıra Sizde

"YARDIMSEVER" kelimesinin sesli harflerinin oluşturduğu küme için bir evrensel küme belirleyiniz.

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri küme belirtir?

a) Ankara ilinin ilçeleri

b) En sevilen meyveler

c) Türkiye'ye komşu olan ülkeler

ç) Uçabilen köpekler

d) S harfi ile başlayan aylar

e) Sınıfın çalışkan öğrencileri

2. Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulunuz.

a) $A = \{1, \{2\}, \{1\}, \{1, 2\}, 3, 4, \{3, 4, 5\}\}$

b) $B = \{\varnothing\}$

c) $C = \{\ \}$

ç) $D = \{x \mid -2 \le x \le 6,\ x \in \mathbb{N}\}$

3. $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ kümesini aşağıda belirtilen yöntemlerle gösteriniz.

a) Ortak özellik yöntemi

b) Venn şeması yöntemi

4. $A = \{a, \{a, b\}, b, \{b\}, \{1, 2\}, 2\}$ kümesi için aşağıda verilen ifadeleri inceleyiniz. Yanlarındaki kutucuklara doğru olanlar için "D", yanlış olanlar için "Y" yazınız.

☐ $a \in A$	☐ $\{a, b\} \in A$	☐ $b \in A$
☐ $\{a\} \in A$	☐ $1 \in A$	☐ $\{\{b\}\} \in A$

5. Aşağıdaki kümelerden hangileri boş kümedir?

a) $A = \{x \mid x$, 13 ün bölenleri$\}$ **b)** $B = \{x \mid x^2 < 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{x \mid -1 < x \le 0,\ x \in \mathbb{N}\}$ **ç)** $D = \{x \mid x$, 2 den büyük çift asal sayılar$\}$

6. Aşağıdaki kümelerden hangileri sonlu kümedir?

a) $A = \{x \mid x > 14,\ x \in \mathbb{Z}\}$

b) $B = \{x \mid x \le -1,\ x \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{x \mid x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

ç) $D = \{x \mid 0 < x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$

d) $E = \{x \mid -2 \le x \le 12,\ x \in \mathbb{R}\}$

9.2.1.2. Alt Küme

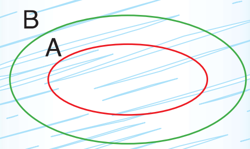
Enerji Veren Besinler

Karbonhidratlar	Yağlar	Proteinler
• Ekmek	• Fındık	• Et
• Buğday	• Ceviz	• Süt
• Makarna	• Ayçiçeği	• Yumurta
• Patates	• Zeytin	• Balık

Yukarıda enerji veren besinlerin sınıflandırılması yapılmıştır. Bu üç sınıfın her biri bir küme oluşturmaktadır.

» Karbonhidratlara, yağlara, proteinlere örnek olarak verilen besinlerin her biri aynı zamanda enerji veren bir besin midir?

!



$A \subseteq B$

$B \supseteq A$

Bilgi Kutusu

A ve B herhangi iki küme olsun. A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanı ise **A kümesine B kümesinin alt kümesidir** denir ve $A \subseteq B$ veya $A \subset B$ ile gösterilir. Aynı durum için **B kümesi A kümesini kapsar** da denir ve $B \supseteq A$ veya $B \supset A$ ile gösterilir. A kümesinin en az bir elemanı, B kümesinin elemanı değilse **A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir** denir ve $A \not\subseteq B$ ile gösterilir.

! $A \subset B \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B]$ dir.

Örnek

$A = \{x \mid 2 \le x \le 10,\ x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x \mid 1 \le x \le 10,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümelerini karşılaştıralım.

Çözüm

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ olup A kümesinin her elemanı B kümesinin de elemanıdır. Bu nedenle $A \subseteq B$ dir.

Sıra Sizde

Türkiye Süper Ligi’nde oynayan futbolcuların kümesi ile Türkiye Süper Ligi’nde oynayan yabancı futbolcuların kümesi arasında nasıl bir ilişki vardır?

Örnek

Güneydoğu Anadolu Bölgemizde bulunan illerimizin kümesini A, Suriye ile sınırı olan illerimizin kümesini B ile gösterelim. $B \subseteq A$ olup olmadığını belirleyelim.

Çözüm

A = {Kilis, Gaziantep, Adıyaman, Diyarbakır, Şanlıurfa, Batman, Siirt, Mardin, Şırnak},

B = {Hatay, Gaziantep, Kilis, Şanlıurfa, Mardin, Şırnak}

şeklindedir.

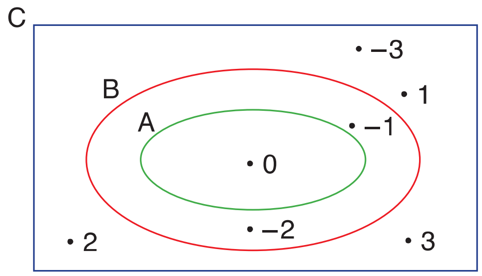
B kümesinin elemanı olan Gaziantep, Kilis, Şanlıurfa, Mardin, Şırnak A kümesinin de elemanıdır. Fakat B kümesinin elemanı olan Hatay, A kümesinin elemanı değildir. Bu nedenle $B \not\subseteq A$ dır.

Örnek

$A = \{x \mid -2 < x \leq 0,\ x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x < 1,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ve $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ kümeleri veriliyor.

A, B ve C kümelerini Venn şeması ile gösterelim. Bu kümeler arasındaki ilişkiyi açıklayalım.

Çözüm



$A = \{0\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$ ve $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ olup A, B ve C kümelerinin Venn şeması ile gösterimi yukarıdaki gibidir.

Şemadan da görüldüğü gibi $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ iken $A \subseteq C$ dir.

Bilgi Kutusu

A, B ve C herhangi bir küme olmak üzere,

- Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\varnothing \subseteq A$ dır.
- Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subseteq A$ dır.
- Her küme evrensel kümenin alt kümesidir. $A \subseteq E$ dir.
- $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ dir.

Ernst Zermelo
(Ernst Zermelo)
(1871-1953)

Kümeler kuramına katkıları ile tanınan Alman matematikçidir. Zermelo aksiyomu ile kümeler kuramında tartışma başlatmıştır. Bu aksiyoma göre bir kümenin her alt kümesinde tek ve belli bir şekilde üstünlüğü bulunan bir öge seçilebilir, yani her küme iyi sıralanabilir. İyi sıralama kavramı 20. yüzyılın başlarında çok tartışılmış ve bugün herkes tarafından kabul edilmiştir.

Bilgi Kutusu

Bir A kümesinin kendinden başka alt kümelerine bu kümenin **öz alt kümeleri** denir.

Örnek

A = { } , B = {a} , C = {a, b} ve D = {a, b, c} kümelerinin alt kümelerini yazalım. Kümelerin eleman sayıları ile alt kümelerinin sayılarını karşılaştıralım.

Çözüm

A = { } nin alt kümesi { } dir.
B = {a} nın alt kümeleri { }, {a} dır.
C = {a, b} nin alt kümeleri { }, {a}, {b}, {a, b} dir.
D = {a, b, c} nin alt kümeleri { }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c} dir.
s(A) = 0 iken alt küme sayısı $1 = 2^0$,
s(B) = 1 iken alt küme sayısı $2 = 2^1$,
s(C) = 2 iken alt küme sayısı $4 = 2^2$,
s(D) = 3 iken alt küme sayısı $8 = 2^3$ olduğu görülmektedir.

Bilgi Kutusu

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n, öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

Örnek

$A = \{x \mid -3 \leq x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin alt kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm

A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2} olur. s (A) = 6 olduğundan A kümesinin alt kümelerinin sayısı $2^6 = 64$ bulunur.

Örnek

Öz alt kümelerinin sayısı 255 olan kümenin eleman sayısını bulalım.

Çözüm

Kümenin eleman sayısı n olsun. Öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.
$2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$ bulunur.

Örnek

A = {p, r, s, t} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) p elemanının bulunmadığını

b) p elemanının bulunduğunu

c) r ve s elemanlarının bulunduğunu

ç) s veya t elemanlarının bulunduğunu

hesaplayalım.

Çözüm

a) A kümesinden p elemanını çıkararak oluşturacağımız kümenin alt kümelerinde p bulunmaz. O hâlde p elemanının bulunmadığı alt küme sayısı $2^3 = 8$ olur.

b) A kümesinin bütün alt kümelerinin sayısından p elemanı bulunmayan alt kümelerin sayısını çıkarırsak p elemanının bulunduğu alt küme sayısını buluruz. O hâlde p elemanının bulunduğu alt küme sayısı $2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$ olur.

c) A kümesinden r ve s elemanlarını çıkararak oluşturacağımız kümenin $2^2 = 4$ tane alt kümesi vardır. Bu kümelerin her birine r ve s yi eleman olarak eklersek 4 tane kümede r ve s elemanları bulunur.

ç) A kümesinin tüm alt kümelerinin sayısından s ve t elemanlarının bulunmadığı alt küme sayısını çıkarırsak s veya t elemanlarının bulunduğu alt küme sayısını buluruz.

s ve t elemanlarının bulunmadığı alt küme sayısı $2^2 = 4$ olup s veya t elemanlarının bulunduğu alt küme sayısı $2^4 - 4 = 16 - 4 = 12$ olur.

Sıra Sizde

A = {p, r, s, t} kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde p ve s elemanları bulunur, r elemanı bulunmaz?

Örnek

A = {7, 8, 9} ve B = {6, 7, 8, 9, 10} olduğuna göre $A \subseteq K \subseteq B$ şartını sağlayan K kümelerinin sayısını bulalım.

Çözüm

B kümesinin A kümesinde olmayan elemanlarının kümesi {6, 10} dur. Bu kümenin alt kümeleri { }, {6}, {10}, {6, 10} dur. Bu kümelerin her birine A kümesinin elemanlarının eklenmesiyle K kümesi oluşturulabilir. Bu nedenle $A \subseteq K \subseteq B$ şartını sağlayan 4 tane K kümesi vardır.

ALIŞTIRMALAR

1. Ülkemizdeki illerin kümesi A, Akdeniz Bölgesi'ndeki illerin kümesi B, Akdeniz'e kıyısı olan illerin kümesi C olsun.

a) $C \subseteq B$ midir? **b)** $B \subseteq A$ mıdır?

2. $A = \{x \mid -5 \leq x \leq -3,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin kaç tane alt kümesi vardır?

3. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e, f\}$ kümelerinin her ikisinin de alt kümesi olan kümeleri yazınız.

4. Alt kümelerinden bazıları $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$ olan kümenin en az kaç alt kümesi vardır?

5. Öz alt küme sayısı 511 olan küme kaç elemanlıdır?

6. $A = \{x, y, \{y\}, \{x, z\}, z\}$ kümesi için aşağıda verilenleri inceleyiniz. Doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

☐ $x \not\subseteq A$	☐ $\{\{y\}\} \subseteq A$	☐ $\{z\} \subseteq A$
☐ $\{y\} \subseteq A$	☐ $\{x, z\} \subseteq A$	☐ $\{\{x, z\}\} \not\subseteq A$
☐ $y \subseteq A$	☐ $\{z\} \subseteq A$	☐ $z \not\subseteq A$

7. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümeleri veriliyor.

$A \neq D$, $B \neq D$ ve $A \subseteq D \subseteq B$ şartlarını sağlayan kaç farklı D kümesi vardır?

8. Bir kümenin eleman sayısı 2 artırılırsa alt küme sayısı kaç katına çıkar?

9. A kümesinin eleman sayısı ile B kümesinin eleman sayısının toplamı 10 dur. B kümesinin alt küme sayısı 256 olduğuna göre s(A) kaçtır?

10. $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) a ve b elemanları bulunur?

b) a elemanı bulunur, d elemanı bulunmaz?

c) c ya da e elemanı bulunur?

9.2.1.3. İki Kümenin Eşitliği

$A = \{x \mid 0 < x^2 < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \mid 1 \leq x < 4,\ x \in \mathbb{N}\}$

» A ve B kümelerinin elemanlarını karşılaştırınız.

Bilgi Kutusu

$A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise yani A ve B aynı elemanlardan oluşuyorsa bu kümelere **eşit kümeler** denir ve $A = B$ ile gösterilir. A ve B eşit kümeler değilse $A \neq B$ ile gösterilir.

! $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ dır.

Örnek

$A = \{x \mid 36 \leq x^2 \leq 64,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x \mid 5 < x < 9,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümeleri veriliyor. $A = B$ midir? Bulalım.

Çözüm

A ve B kümelerini liste biçiminde yazarsak $A = \{6, 7, 8\}$ ve $B = \{6, 7, 8\}$ dir. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğundan $A = B$ olur.

Sıra Sizde

$A = \{x \mid 1 < x < 10,\ x = 3k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ve

$B = \{x \mid 1 \leq x^2 < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$

kümeleri eşit kümeler midir?

! Eleman sayıları aynı olan kümeler eşit kümeler olmayabilir.

Örnek

A kümesinin eleman sayısı $2a - 4$, B kümesinin eleman sayısı $a + 3$ tür. A ile B eşit kümeler olduğuna göre s(A) nı bulalım.

Çözüm

$A = B \Rightarrow s(A) = s(B) \Rightarrow 2a - 4 = a + 3 \Rightarrow a = 7$ olur.

$s(A) = 2a - 4 = 2 \cdot 7 - 4 = 10$ bulunur.

1. Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanların yanına "D", yanlış olanların yanına "Y" yazınız.

- [ ] $s(A) = s(B)$ ise $A = B$ olur.
- [ ] Eşit kümelerin alt küme sayıları eşittir.
- [ ] $A = B$ ise $A \subseteq B$ dir.
- [ ] $B \not\subseteq A$ ise $A \neq B$ dir.

2. Aşağıdaki kümelerden birbirine eşit olanları belirleyiniz.

a) $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{x \mid 0 < x^2 < 36, x \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{x \mid -3 < x < 1, x \in \mathbb{Z}\}$

ç) $D = \{x \mid x < 6, x \in \mathbb{Z}^+\}$

d) $E = \{x \mid 0 < x^2 \leq 9, x \in \mathbb{N}\}$

3. A kümesinin alt küme sayısı $a + 5$, B kümesinin alt küme sayısı $3a - 17$ dir.

$A = B$ olduğuna göre $s(A)$ kaçtır?

4. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{x \mid x \leq 4, x \in \mathbb{N}\}$

$C = \{x \mid -5 < x < 5, x \in \mathbb{N}\}$

$D = \{x \mid x^2 < 16, x \in \mathbb{N}\}$

kümeleri ile ilgili aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a) $A = B$	**b)** $C = D$
c) $A = D$	**ç)** $A = C$
d) $B = C$	**e)** $B = D$

5. Alt küme sayısı 128 olan bir kümeye eşit olan bir kümenin eleman sayısı kaçtır?

9.2.2. KÜMELERDE İŞLEMLER

Aşağıda bazı tarım ürünlerinin üretiminin en fazla olduğu bölgeler verilmiştir.

Bölgeler	Tarım ürünleri						
	Buğday	Arpa	Mısır	Pirinç	Yulaf	Nohut	Mercimek
Akdeniz Bölgesi			✗	✗	✗	✗	
Doğu Anadolu Bölgesi		✗					
Ege Bölgesi						✗	
Güneydoğu Anadolu Bölgesi							✗
İç Anadolu Bölgesi	✗	✗			✗	✗	✗
Karadeniz Bölgesi			✗	✗			
Marmara Bölgesi				✗	✗		

- Bütün bölgelerde üretilen bir ürün var mıdır?
- Yalnızca bir bölgede üretilen ürün hangisidir?
- Akdeniz Bölgesi ve İç Anadolu Bölgesi'nde üretilen ürünleri söyleyiniz.
- Güneydoğu Anadolu Bölgesi'nde üretilmeyen ürünleri söyleyiniz.

Sembol ve Gösterimler

$\cup$

$\cap$

$A - B$ (veya $A \setminus B$)

A'

$A \times B$

$s(A \times B)$

9.2.2.1. Kümelerde Birleşim, Kesişim, Fark ve Tümleme İşlemleri

Kümelerde Birleşim ve Kesişim İşlemleri

Bir okulda iki kompozisyon yarışması düzenlenmektedir. Bu kompoziyon yarışmalarından birinin konusu sabrın önemi, diğerinin konusu ise adaletin önemidir.

Kompozisyon yarışmalarına katılacak olan öğrencilerin adları yandaki listede verilmiştir.

Sabrın Önemi	Adaletin Önemi
Gülay	Eren
Ahmet	Sevgi
Emre	İrem
Zehra	Ahmet
	Emre

» Her iki konuda da yazdıkları kompozisyon ile yarışmaya katılacak olan öğrenciler kimlerdir?

» En az bir konuda yazdığı kompozisyonla yarışmaya katılacak olan öğrenciler kimlerdir?

! $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$

Bilgi Kutusu

- A ve B herhangi iki küme olmak üzere A ve B kümelerinin bütün elemanlarından oluşan kümeye bu iki kümenin **birleşim kümesi** denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir.
- A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye bu iki kümenin **kesişim kümesi** denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir.

Örnek

- Penguen
- Köpek
- Timsah
- Balık
- Kedi
- Koyun

a) Yukarıdaki hayvanlardan karada yaşayanların kümesine K, suda yaşayanların kümesine S diyelim. K ve S kümelerini liste biçiminde yazalım.

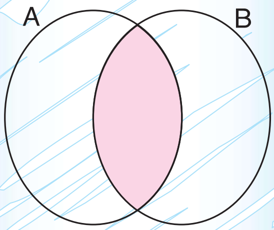
b) $K \cap S$ ve $K \cup S$ kümelerini yazalım.

Çözüm

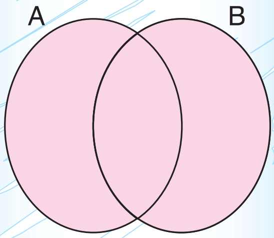
a) K = {köpek, kedi, timsah, penguen, koyun} ve
S = {penguen, balık, timsah} şeklindedir.

b) $K \cap S$ = {timsah, penguen} ve
$K \cup S$ = {köpek, kedi, timsah, penguen, koyun, balık} olur.

!



$A \cap B$



$A \cup B$

Örnek

$A = \{x \mid -1 \le x < 3,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{x \mid -3 < x < 1,\ x \in \mathbb{Z}\}$ kümeleri veriliyor.

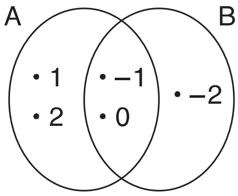
$A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerini aşağıda belirtilen yöntemlerle gösterelim.

a) Venn şeması yöntemi **b)** Ortak özellik yöntemi

Çözüm

a) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-2, -1, 0\}$ olup
$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $A \cap B = \{-1, 0\}$ şeklindedir.

Bu kümelerin Venn şeması ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



b) $A \cup B = \{x \mid -2 \le x \le 2,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ve $A \cap B = \{x \mid -2 < x < 1,\ x \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde yazabiliriz.

! $A \cup E = E$

$A \cap E = A$

Sıra Sizde

$A = \{x \mid 2 < x < 10,\ x \text{ asal sayı}\}$ ve $B = \{x \mid -1 \le x \le 3,\ x \in \mathbb{N}\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cap B$ ve $A \cup B$ kümelerini liste yöntemi ile yazınız.

Örnek

$A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{k, l, m, n\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cap B$ kümesini liste yöntemi ile yazalım.

Çözüm

A ve B kümelerinin ortak elemanı olmadığı için $A \cap B = \{\ \}$ olur.

Bilgi Kutusu

$A \cap B = \varnothing$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.

Örnek

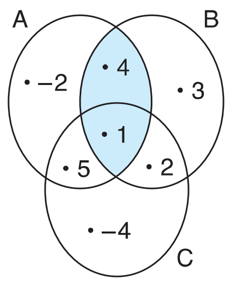
$A = \{-2, 1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $C = \{-4, 1, 2, 5\}$ kümeleri veriliyor.

$A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ ve $A \cap B \cap C$ kümelerini Venn şeması ile gösterelim.

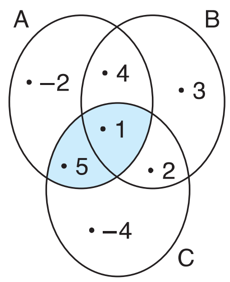
Çözüm

$A \cap B = \{1, 4\}$, $A \cap C = \{1, 5\}$, $B \cap C = \{1, 2\}$ ve $A \cap B \cap C = \{1\}$ dir.

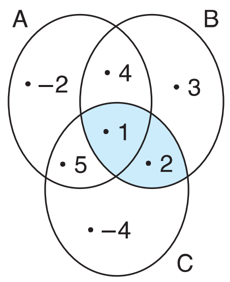
Bu kümelerin Venn şeması ile gösterimi aşağıdaki gibidir.



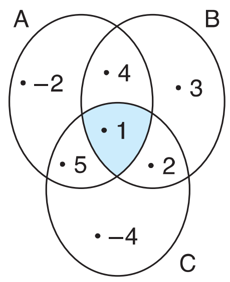
$A \cap B$



$A \cap C$



$B \cap C$



$A \cap B \cap C$

Bernhard Bolzano
(Bernart Bolzano)
(1781-1848)

İtalyan asıllı bir Çek düşünürüdür. Aynı zamanda iyi bir mantıkçı ve matematikçidir. Temel çalışmaları sonsuzlar paradoksu üzerinedir. Sonsuz kümeler üzerinde çalışmıştır. Gerçek fonksiyonlar kuramına katkıları olmuş, modern mantığın öncülerinden olmuştur. Analizde, geometride, mantıkta, felsefede çok sayıda eseri vardır.

Sıra Sizde

$A = \{-2, 1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $C = \{-4, 1, 2, 5\}$ kümeleri için $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$ kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.

Örnek

Her A kümesi için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup A = A$ **b)** $A \cap A = A$

Çözüm

a) $A \cup A = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

b) $A \cap A = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

Sıra Sizde

$A = \{a, b, c\}$ kümesi veriliyor.

$A \cap A$ ve $A \cup A$ kümelerini yazınız.

Bilgi Kutusu

Her A kümesi için $A \cup A = A$ ve $A \cap A = A$ dır. Bu özelliğe **tek kuvvet özelliği** denir.

Örnek

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup B = B \cup A$ **b)** $A \cap B = B \cap A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **ç)** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Çözüm

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in A\} = B \cup A$ olur.

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \in A\} = B \cap A$ olur.

c) $(A \cup B) \cup C = \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ veya } x \in C\}$

$= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ veya } x \in C\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ veya } x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cup C)\} = A \cup (B \cup C)$ olur.

ç) $(A \cap B) \cap C = \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ ve } x \in C\}$

$= \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ ve } x \in C\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ ve } x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cap C)\} = A \cap (B \cap C)$ olur.

Bilgi Kutusu

- Kümelerde birleşim ve kesişim işlemlerinin **değişme özelliği** vardır. Yani A ve B kümeleri için $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$ tir.
- Kümelerde birleşim ve kesişim işlemlerinin **birleşme özelliği** vardır. Yani A, B ve C kümeleri için $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ tir.

Örnek

Her A kümesi için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup \varnothing = A$ **b)** $A \cap \varnothing = \varnothing$

Çözüm

a) $A \cup \varnothing = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in \varnothing\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

b) $A \cap \varnothing = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in \varnothing\} = \{x \mid x \in \varnothing\} = \varnothing$ olur.

! $p \vee 0 \equiv p$
$p \wedge 0 \equiv 0$

Bilgi Kutusu

- Bir küme ile boş kümenin birleşimi kümenin kendisini verdiği için birleşim işleminin **birim (etkisiz) elemanı** $\varnothing$ dir. $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ tir.
- Bir küme ile boş kümenin kesişimi $\varnothing$ olduğu için kesişim işleminin **yutan elemanı** $\varnothing$ dir. $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$ tir.

Örnek

A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ise aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup B = B$ **b)** $A \cap B = A$

Çözüm

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in B\}$
$= \{x \mid x \in B\} = B$ olur.

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\}$
$= \{x \mid x \in A\} = A$ olur.

! $A \subseteq B$ iken
$x \in A \Rightarrow x \in B$ dir.

Bilgi Kutusu

A ve B kümeleri için $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$ tir.

Örnek

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim.

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ç) $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

Çözüm

a) $A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\}$

$= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)\}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur.

b) $(B \cap C) \cup A = \{x \mid x \in (B \cap C) \text{ veya } x \in A\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ ve } x \in C) \text{ veya } x \in A\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ veya } x \in A) \text{ ve } (x \in C \text{ veya } x \in A)\}$

$= \{x \mid x \in (B \cup A) \text{ ve } x \in (C \cup A)\}$

$= (B \cup A) \cap (C \cup A)$ olur.

c) $A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)\}$

$= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)\}$

$= \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)\}$

$= \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)\}$

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olur.

ç) $(B \cup C) \cap A = \{x \mid x \in (B \cup C) \text{ ve } x \in A\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ veya } x \in C\} \text{ ve } x \in A)\}$

$= \{x \mid (x \in B \text{ ve } x \in A) \text{ veya } (x \in C \text{ ve } x \in A)\}$

$= \{x \mid x \in (B \cap A) \text{ veya } x \in (C \cap A)\}$

$= (B \cap A) \cup (C \cap A)$ olur.

Bilgi Kutusu

- Birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ve
  $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ tir.
- Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve
  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ tir.

Örnek

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $A \cap C = \{2, 4, 5, 7\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesini bulalım.

Çözüm

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 5, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ olur.

Örnek

Aşağıda verilen kümeleri Venn şeması yöntemi ile göstererek $s(A \cup B)$ nı bulalım.

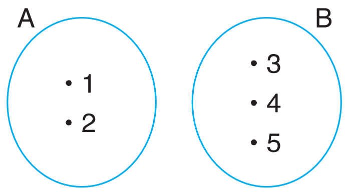
a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e, f\}$

c) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$

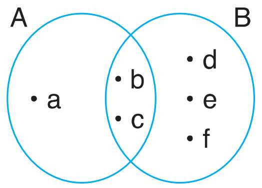
Çözüm

a)



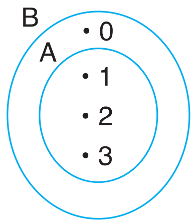
$s(A \cup B) = 5$ olur.

b)



$s(A \cup B) = 6$ olur.

c)



$s(A \cup B) = 4$ olur.

Bilgi Kutusu

A ve B herhangi iki küme olmak üzere

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ tir.

$A \cap B = \emptyset$ iken $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ tir.

$A \subseteq B$ iken $s(A \cup B) = s(B)$ tir.

TOPLANTI

Bir toplantıda çay, süt ve kahve ikram edilmektedir. Toplantıya katılanlardan

1) Yedisi çay içmez.
2) Altısı süt içmez.
3) Beşi kahve içmez.
4) Dördü ne çay ne de süt içer.
5) Üçü ne çay ne de kahve içer.
6) İkisi ne süt ne de kahve içer.
7) Biri ne çay ne süt ve ne de kahve içer.
8) Hiçbiri üçünü birden içmez.

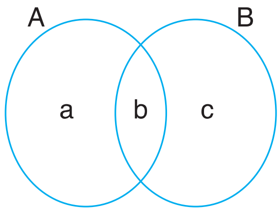
Toplantıda kaç kişi vardır?

Örnek

$A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq A$, $A \cap B \neq \varnothing$, $s(A) = 6$ ve $s(B) = 7$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nin en küçük değerini bulalım.

Çözüm

$s(A \cup B)$ nın en küçük değerini alması için $s(A \cap B)$ nın en büyük değerini alması gerekir.



a, b, c bulundukları bölgeye ait eleman sayılarını göstersin.

$a = 1$, $b = 5$, $c = 2$ olmalıdır.

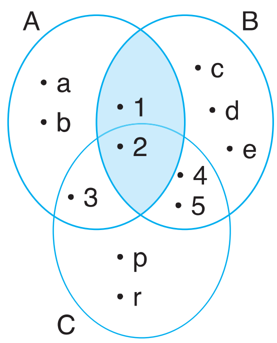
O hâlde $s(A \cup B)$ nin en küçük değeri $1 + 5 + 2 = 8$ bulunur.

Örnek

Yandaki Venn şemasında gösterilen A, B, C kümeleri için aşağıda istenenleri bulup karşılaştıralım.

a) $s(A \cup B \cup C)$

b) $s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$



Çözüm

a) $A \cup B \cup C = \{a, b, 1, 2, 3, 4, 5, c, d, e, p, r\}$ olup $s(A \cup B \cup C) = 12$ bulunur.

b) $s(A) = 5$, $s(B) = 7$, $s(C) = 6$, $s(A \cap B) = 2$, $s(A \cap C) = 2$, $s(B \cap C) = 3$ ve $S(A \cap B \cap C) = 1$ olup

$s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

$= 5 + 7 + 6 - 2 - 2 - 3 + 1 = 12$ bulunur.

a ve b maddelerinde bulduğumuz sonuçlar eşittir.

Bilgi Kutusu

A, B ve C kümeleri için

$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$ tir.

Örnek

$s(A) = 2 \cdot s(B)$ ve $s(A \cap B) + s(A \cup B) = 18$ olduğuna göre $s(A)$ nı bulalım.

Çözüm

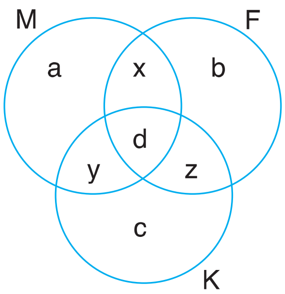
$$s(A \cap B) + s(A \cup B) = 18 \Rightarrow s(A \cap B) + s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 18$$
$$\Rightarrow s(A) + s(B) = 18$$
$$\Rightarrow 2 \cdot s(B) + s(B) = 18$$
$$\Rightarrow 3 \cdot s(B) = 18$$
$$\Rightarrow s(B) = 6 \text{ ve } s(A) = 2 \cdot 6 = 12 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

$s(A \cup B) = 28$ ve $s(A) = 2 \cdot s(B) = 3 \cdot s(A \cap B)$ olduğuna göre $s(A)$ nı bulunuz.

Örnek

Bir sınıftaki öğrencilerden matematik, fizik, kimya derslerinden geçenlerin kümesi sırasıyla M, F, K olarak isimlendirilmiştir. a, b, c, d, x, y, z harfleri ise içinde bulundukları kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.



Buna göre aşağıda istenenleri bulalım.

a) Matematik dersinden geçenlerin sayısını

b) Fizik ve kimya derslerinden geçenlerin sayısını

c) Üç dersten de geçenlerin sayısını

ç) En az iki dersten geçenlerin sayısını

d) En çok iki dersten geçenlerin sayısını

Çözüm

a) $s(M) = a + x + y + d$ olur.

b) $s(F \cap K) = d + z$ olur.

c) $s(F \cap K \cap M) = d$ olur.

ç) En az iki dersten geçenlerin sayısı $x + y + z + d$ dir.

d) En çok iki dersten geçenlerin sayısı $a + b + c + x + y + z$ dir.

Örnek

Herkesin futbol, voleybol veya basketbol oyunlarından en az birini oynadığı bilinen 25 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 12 si futbol, 16 sı voleybol oynayabiliyor.

Bu öğrencilerin 8 i futbol ve voleybol, 7 si voleybol ve basketbol, 6 sı futbol ve basketbol, 3 ü her üç oyunu da oynayabildiğine göre basketbol oynayan kaç öğrenci olduğunu bulalım.

Çözüm

Futbol oynayanların kümesini F, voleybol oynayanların kümesini V, basketbol oynayanların kümesini B ile gösterelim.

$s(F) = 12$, $s(V) = 16$, $s(F \cap V) = 8$, $s(V \cap B) = 7$, $s(F \cap B) = 6$,
$s(F \cap B \cap V) = 3$ ve $s(F \cup B \cup V) = 25$ tir.

$$s(F \cup B \cup V) = s(F) + s(B) + s(V) - s(F \cap B) - s(F \cap V) - s(V \cap B) + s(F \cap B \cap V)$$

$\Rightarrow 25 = 12 + s(B) + 16 - 6 - 8 - 7 + 3 \Rightarrow 25 = 10 + s(B)$

$\Rightarrow s(B) = 15$ bulunur.

Örnek

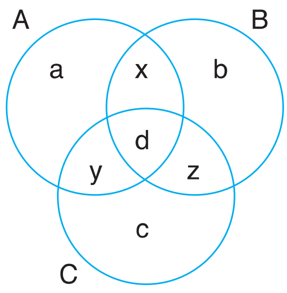
Bir sınıftaki öğrenciler huzurevini, hayvan barınaklarını ve Sevgi Evlerini ziyaret ediyor. Herkesin en az bir yeri ziyaret ettiği 36 kişilik bu sınıfta en az iki yeri ziyaret eden 12 öğrenci, en çok iki yeri ziyaret eden 32 öğrenci vardır.

Buna göre yalnız iki yeri ziyaret eden öğrenci sayısını bulalım.

Çözüm

Huzurevini ziyaret edenlerin kümesini A, hayvan barınaklarını ziyaret edenlerin kümesini B, Sevgi Evlerini ziyaret edenlerin kümesini C ile gösterelim.

a, b, c, d, x, y, z harfleri içinde bulunduğu kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.



Herkes en az bir yeri ziyaret ettiği için $a + b + c + d + x + y + z = 36$,

En az iki yeri ziyaret edenlerin sayısı $x + y + z + d = 12$,

En çok iki yeri ziyaret edenlerin sayısı $a + b + c + x + y + z = 32$ olur.

$a + b + c + d + x + y + z = 36 \Rightarrow d = 36 - 32 = 4$ bulunur.

$x + y + z + d = 12 \Rightarrow x + y + z + 4 = 12 \Rightarrow x + y + z = 8$ bulunur.

O hâlde yalnız iki yeri ziyaret edenlerin sayısı $x + y + z = 8$ olur.

Örnek

Bir grupta bulunan 6 kişi esmer kahverengi gözlü, 4 kişi sarışın yeşil gözlüdür. Esmer yeşil gözlülerin sayısı, sarışın kahverengi gözlülerin sayısından 2 fazladır.

Grupta 26 kişi olduğuna göre sarışın kişilerin sayısını bulalım.

Çözüm

Esmer ve sarışın olanları 2 ayrı grup olarak düşünüp bunları yeşil gözlü ve kahverengi gözlü olarak ayırdığımızda 4 ayrık küme oluştururuz. Bu kümelerin eleman sayılarını aşağıdaki tabloda gösterelim.

	Yeşil gözlü	Kahverengi gözlü
Esmer	$x + 2$	6
Sarışın	4	x

$x + 2 + 6 + 4 + x = 26 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$ olur.

O hâlde gruptaki sarışın kişilerin sayısı $x + 4 = 7 + 4 = 11$ olur.

Örnek

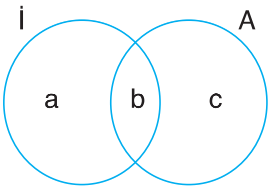
Bir şirkette çalışanların %45 i İngilizceyi, %70 i Almancayı ve 60 kişi her iki dili konuşabiliyor.

Herkesin İngilizce veya Almancadan en az birini konuşabildiği bu şirkette çalışanların sayısını bulalım.

Çözüm

a, b, c içinde bulundukları kümelerin eleman sayıları olsun.

İki dili de konuşanların sayısı b = 60 tır.



İngilizceyi konuşabilenler yani $a + b$ kişi çalışanların %45 i, Almanca konuşabilenler yani $b + c$ kişi çalışanların %70 idir.

Şirkette çalışanların sayısı $s(İ \cup A) = a + b + c$ olur.

$s(İ \cup A) = s(İ) + s(A) - s(İ \cap A) \Rightarrow \%100 = \%45 + \%70 - s(İ \cap A)$

$\Rightarrow s(İ \cap A) = \%15$ olur.

Çalışanların %15 i 60 kişi olduğuna göre %100 ü $\dfrac{60 \cdot 100}{15} = 400$ kişidir.

Bir Kümenin Tümleyeni

Otoparklarda engellilere ait araçlar için alanlar ayrılmaktadır. Engelli olmayan kişilerin bu alanlara araçlarını park etmemesi gerekir. Bu otoparkta araçlara ayrılan alanlar A_1, A_2, ..., A_6, B_1, B_2, ..., B_6, C_1, C_2, ..., C_6, şeklinde numaralandırılmıştır. 18 araçlık bu otoparkta B_2, ..., B_6 numaralı alanlar engellilerin araçlarına ayrılmıştır.

» Hiç araç yokken bu otoparka gelen engelli olmayan bir kişinin aracını park edebileceği alanların numaralarından oluşan kümeyi liste yöntemi ile yazınız.

Bilgi Kutusu

E evrensel küme olmak üzere A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin tümleyeni** denir ve bu küme **A'** ile gösterilir.

A kümesi ile A' kümesinin eleman sayılarının toplamı E kümesinin eleman sayısını verir. Yani $s(A) + s(A') = s(E)$ tir.

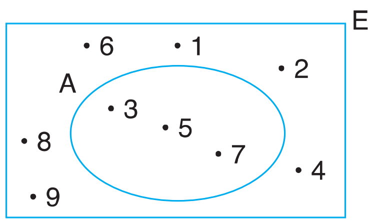
Örnek

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve $A = \{3, 5, 7\}$ olsun.

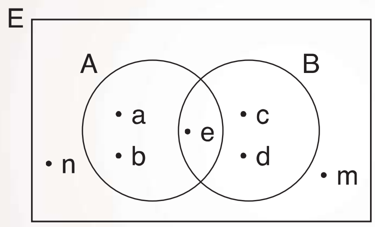
A' kümesini yazalım. Venn şeması ile gösterelim.

Çözüm

$A' = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ olup Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir. Dikkat edilirse $A \subseteq E$ ve $A' \subseteq E$ olduğu görülür.



Sıra Sizde



Yandaki Venn şemasına göre A', B', $(A \cap B)'$ ve $(A \cup B)'$ kümelerini liste yöntemi ile yazınız.